北一女中 106 學年度《數戰數決》有獎徵答活動

班別：二 年 誠 班　座號：39 號　姓名：譚青旻

題號：3-3　頁碼／總頁數：＿＿＿＿（如果只有一頁，可不填）

（請不要將兩題的解答寫在同一張答案紙，一題的解答也不要寫在同一張答案紙的正反面。）

(1) $x^4-21x^2-8x+137=(x-a)^2+(x^2-b)^2=x^4+(1-2b)x^2+(-2a)x+(a^2+b^2)$

$\Rightarrow 1-2b=-21,\ b=11,\ -2a=-8,\ a=4,\ (a,b)=(4,11)$ ※

(2) $f(x)=\sqrt{x^4-21x^2-8x+137}-\sqrt{x^4-5x^2+9}=\sqrt{(x-4)^2+(x^2-11)^2}-\sqrt{x^2+(x^2-3)^2}$

令 $a_1=(x-4)$，$a_2=(x^2-11)$，$b_1=x$，$b_2=(x^2-3)$

$\vec{a}=(a_1,a_2)$，$\vec{b}=(b_1,b_2)$，設 $y=\sqrt{(x-4)^2+(x^2-11)^2}-\sqrt{x^2+(x^2-3)^2}$

$y^2=[(x-4)^2+(x^2-11)^2]+[x^2+(x^2-3)^2]-2\left(\sqrt{(x-4)^2+(x^2-11)^2}\right)\left(\sqrt{x^2+(x^2-3)^2}\right)$

$=(a_1^2+a_2^2)+(b_1^2+b_2^2)-2\left(\sqrt{a_1^2+a_2^2}\right)\left(\sqrt{b_1^2+b_2^2}\right)$

$=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|$，即 $|\vec{a}-\vec{b}|^2$ 之最小值：

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$，此時 $\cos\theta=1$，$\theta=0^\circ$

即 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 同向 $\Rightarrow \vec{a}\parallel\vec{b}$

$\because a_1=b_1-4$，$a_2=b_2-8$ 且 $\vec{a}\parallel\vec{b}$ $\therefore \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_1-4}{b_2-8}$

$\Rightarrow \frac{b_1}{b_2}=\frac{b_1-4}{b_2-8}\Rightarrow b_1b_2-4b_2=b_1b_2-8b_1\Rightarrow b_1:b_2=1:2$

令 $b_1=t$，$b_2=2t\Rightarrow \vec{a}=(t-4,2t-8)$，$\vec{b}=(t,2t)$

得 $a_1=t-4\Rightarrow x-4=t-4\Rightarrow x=t$ 代入 $a_2=2t-8\Rightarrow x^2-11=2x-8$

$\Rightarrow x^2-2x-3=0\Rightarrow x=3$ or -1

$\because$ 此時 $\cos\theta=1$，$\theta=0^\circ$，$\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 同向，故 $x=3$ 不合 $\Rightarrow x=-1$

將 $x=-1$ 代入 $f(x)\Rightarrow f(x)=f(-1)=\sqrt{(-1-4)^2+((-1)^2-11)^2}-\sqrt{(-1)^2+((-1)^2-3)^2}$

$\Rightarrow f(-1)=\sqrt{125}-\sqrt{5}=4\sqrt{5}$ ※

A：(1) $(a,b)=(4,11)$

(2) $f(x)$ 之最大值為 $4\sqrt{5}$

此時 $x=-1$