

北一女中 106 學年度《數戰數決》有獎徵答活動

班別：二年誠班 座號：19.22號 姓名：梁毅, 郭宇軒 

題號：3-b 頁碼/總頁數：_____ (如果只有一頁，可不填)
 (請不要將兩題的解答寫在同一張答案紙，一題的解答也不要寫在同一張答案紙的正反面。)

有 $3^x + 4^y \equiv 5^z \pmod{3}$

$1 \equiv 1^y \equiv 2^z \pmod{3} \Rightarrow z = 2c$ for some $c \in \mathbb{N}$. ✓

$3^x + 4^y \equiv 5^{2c} \pmod{4}$

$(-1)^x \equiv 1^{2c} \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow x = 2a$ for some $a \in \mathbb{N}$ ✓

$3^{2a} + 4^y = 5^{2c} \quad 5^{2c} - 3^{2a} = 2^{2y}$

$(5^c + 3^a)(5^c - 3^a) = 2^{2y}$ ✓

$\Rightarrow 5^c + 3^a = 2^m, 5^c - 3^a = 2^n$ with $m, n \in \mathbb{N}$ ✓

同減 2×3^a

$5^c - 3^a = 2^m \Rightarrow 3^a = 2^n$

$\Rightarrow 2^m - 2 \times 3^a = 2^n$ 同除 2 $2^{m-1} - 3^a = 2^{n-1}$ ✓

從 $5^c + 3^a = 2^m$ 知 $m \geq 3$ 2 的冪次

至少是 8

又 2^{m-1} 為偶數， 3^a 是奇數

移項，模 8 時有 $2^{m-1} - 1 \equiv 3^a \pmod{8}$ 相減若為 2^{n-1} ，則 $2^{n-1} = 1$ $2^{m-1} - 3^a = 1$

$m-1=2$ 時有 $2^2 - 1 = 3^1 = 3^a$

$m-1=1$ 時有 $2^1 - 1 = 1 = 3^0$ 不合， $a \in \mathbb{N}$

$m-1 \geq 3$ 不可能. ✓

$\Rightarrow 3^x = 3^{2a} = 3^2 = 9$

$5^c + 3 = 2^m = 8 \Rightarrow c=1$ 代回 $3^{2a} + 4^y = 5^{2c}$ 得 $9 + 4^y = 25 \quad y=2$

$3^x + 4^y = 5^z$ 只有一組正整數解 $(x, y, z) = (2, 2, 2)$