北一女中 107 學年度下學期《數戰數決》有獎徵答活動

第六期解答：

6-1 將所有奇質數由小至大排成一個數列，已知 p,q 是此數列的連續兩項。
請證明：$p+q$ 必定可以分解成三個「大於 1 的整數」之乘積。
例如：$23+29=2\times2\times13$；$43+47=3\times5\times6$。

解：

因為 p,q 都是奇數，所以 $p+q$ 是偶數 $\Rightarrow \dfrac{p+q}{2}$ 必為整數。

因為 p,q 是連續兩項奇質數所以在 p,q 之間的 $\dfrac{p+q}{2}$ 一定不是質數，

所以存在兩個大於 1 的整數 n_1,n_2 滿足 $\dfrac{p+q}{2}=n_1\cdot n_2$，

故 $p+q=2\cdot n_1\cdot n_2$ 為三個「大於 1 的整數」之乘積，證畢。

6-2 已知數學研究社共有 n 名社員。某日，他們每個人都從 $1,2,3,\cdots\cdots,8$ 之中任選 3 個相異的數，後來他們比對之後發現：任意兩人選的數都至多只有一個數是重複的。請問 n 的最大可能值為何？

答：8。

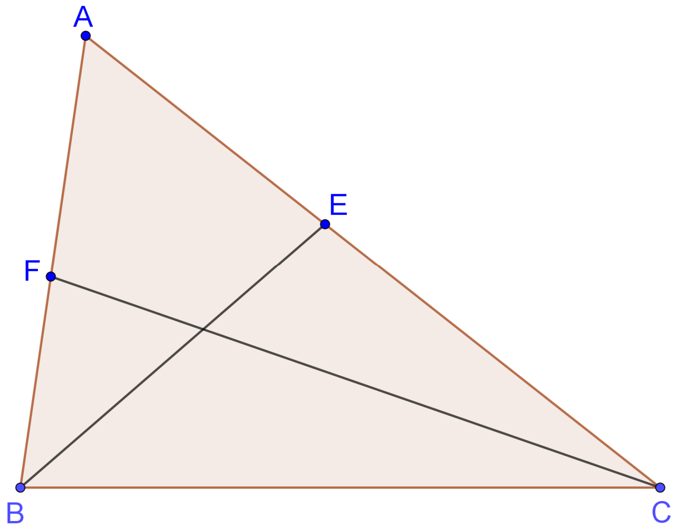
解：

假設 $n\geq9$，則這些社員總共選了 27 個數，
這 27 個數都是從 $1,2,3,\cdots\cdots,8$ 之中選出來的，
根據鴿籠原理，在 $1,2,3,\cdots\cdots,8$ 中至少有一個數被 4 名以上的社員挑選。
不妨假設是 1 被甲、乙、丙、丁挑選，
令甲挑選了 $1,a,b$、乙挑選了 $1,c,d$、丙挑選了 $1,e,f$、丁挑選了 $1,g,h$，
因為任意兩人選的數都至多只有一個數是重複的，
所以 a,b,c,d,e,f,g,h 是相異的 8 個數，
但 a,b,c,d,e,f,g,h 只能從 $2,3,4,\cdots\cdots,8$ 之中挑選，不可能相異，矛盾。
故必有 $n\leq8$。

以下構造一組 $n=8$ 的例子：
8 名社員分別挑選 123、145、167、246、258、368、357、478 即滿足條件。

綜合以上可知 n 的最大可能值為 8。

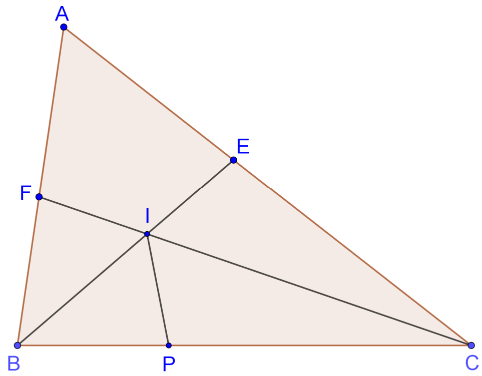
6-3 對於$\triangle ABC$，作$\angle B$的內角平分線交$\overline{AC}$於點E，作$\angle C$的內角平分線交$\overline{AB}$於點F，如下圖。若$\overline{BF}+\overline{CE}=\overline{BC}$，試求$\angle A$所有可能的度數。



答：$\angle A=60^\circ$。

解：

假設$\angle B$與$\angle C$的內角平分線交於點I，如右圖。



在$\overline{BC}$取一點P，使得$\overline{BP}=\overline{BF}$，

則$\overline{PC}=\overline{BC}-\overline{BP}=\overline{BC}-\overline{BF}=\overline{CE}$。

因為$\overline{BP}=\overline{BF}$、$\overline{BI}=\overline{BI}$、$\angle IBF=\angle IBP$，

所以$\triangle IBF\cong\triangle IBP$（SAS 全等性質）$\Rightarrow\angle BIF=\angle BIP$且$\angle BFI=\angle BPI$。

同理可證明：$\angle CIE=\angle CIP$且$\angle CEI=\angle CPI$。

又$\angle BIF=\angle CIE$（對頂角相等），

所以可假設$\angle BIP=\angle BIF=\angle CIE=\angle CIP=\theta$。

因為B、I、E共線，所以$\angle BIP+\angle PIC+\angle CIE=3\theta=180^\circ\Rightarrow\theta=60^\circ$，

故$\angle FIE=360^\circ-4\theta=120^\circ$。

$$
\begin{aligned}
\text{又}\ \angle AFI+\angle AEI&=(180^\circ-\angle BFI)+(180^\circ-\angle CEI)\\
&=(180^\circ-\angle BPI)+(180^\circ-\angle CPI)\\
&=360^\circ-(\angle BPI+\angle CPI)=360^\circ-180^\circ=180^\circ,
\end{aligned}
$$

故$\angle A=360^\circ-\angle FIE-(\angle AFI+\angle AEI)=360^\circ-120^\circ-180^\circ=60^\circ$。

6-4　試求方程組$\begin{cases} x^5 = y + y^5 \\ y^5 = z + z^5 \\ z^5 = w + w^5 \\ w^5 = x + x^5 \end{cases}$之實數解。

答：$(x, y, z, w) = (0, 0, 0, 0)$

解：

假設 $y > 0$，則 $x^5 = y + y^5 > 0 + y^5 = y^5$，由 $x^5 > y^5$ 可得 $x > y > 0$；

因為 $x > 0$，所以 $w^5 = x + x^5 > 0 + x^5 = x^5$，由 $w^5 > x^5$ 可得 $w > x > y > 0$；

因為 $w > 0$，所以 $z^5 = w + w^5 > 0 + w^5 = w^5$，由 $z^5 > w^5$ 可得 $z > w > x > y > 0$；

因為 $z > 0$，所以 $y^5 = z + z^5 > 0 + z^5 = z^5$，由 $y^5 > z^5$ 可得 $y > z > w > x > y$，矛盾。

假設 $y < 0$，則 $x^5 = y + y^5 < 0 + y^5 = y^5$，由 $x^5 < y^5$ 可得 $x < y < 0$；

因為 $x < 0$，所以 $w^5 = x + x^5 < 0 + x^5 = x^5$，由 $w^5 < x^5$ 可得 $w < x < y < 0$；

因為 $w < 0$，所以 $z^5 = w + w^5 < 0 + w^5 = w^5$，由 $z^5 < w^5$ 可得 $z < w < x < y < 0$；

因為 $z < 0$，所以 $y^5 = z + z^5 < 0 + z^5 = z^5$，由 $y^5 < z^5$ 可得 $y < z < w < x < y$，矛盾。

綜合以上所述可知必有 $y = 0$，

代回第一式可得 $x^5 = y + y^5 = 0 + 0^5 = 0 \Rightarrow x = 0$，

代回第四式可得 $w^5 = x + x^5 = 0 + 0^5 = 0 \Rightarrow w = 0$，

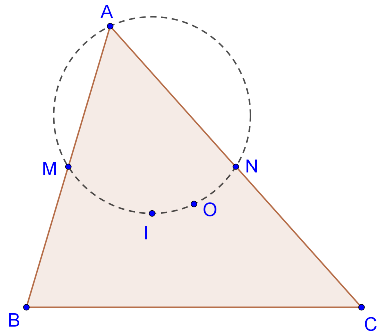
代回第三式可得 $z^5 = w + w^5 = 0 + 0^5 = 0 \Rightarrow z = 0$，

故 $(x, y, z, w) = (0, 0, 0, 0)$ 為唯一解。

6-5　已知$\triangle ABC$中有$\overline{AB}+\overline{AC}=2\overline{BC}$。

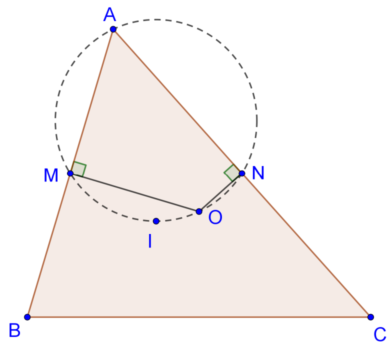
取M、N分別為$\overline{AB}$、$\overline{AC}$的中點，且I、O分別為$\triangle ABC$的內心、外心。

請證明：A、M、I、O、N五點共圓。



解：

Part 1. 先證明A、M、O、N四點共圓。



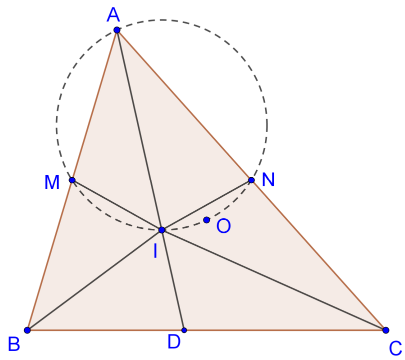
連接$\overline{OM}$、$\overline{ON}$。

因為O為外心，且M、N分別為$\overline{AB}$、$\overline{AC}$的中點，

所以$\overline{OM}$、$\overline{ON}$分別垂直平分$\overline{AB}$、$\overline{AC}$。

故$\angle OMA+\angle ONA=90^\circ+90^\circ=180^\circ \Rightarrow A$、$M$、$O$、$N$四點共圓。

Part 2. 先證明A、M、I、N四點共圓。



連接直線AI交$\overline{BC}$於點D，

因為$\overline{AB}+\overline{AC}=2\overline{BC}$，

再根據內角平分線性質：

$$\overline{BD}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AB}+\overline{AC}}\cdot\overline{BC}=\frac{\overline{AB}}{2\overline{BC}}\cdot\overline{BC}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\overline{BM}\text{。}$$

又因為$\angle IBM=\angle IBD$、$\overline{BI}=\overline{BI}$，所以$\triangle IBM\cong\triangle IBD$（SAS全等性質）

$\Rightarrow \angle IMB=\angle IDB$。同理亦可證得$\angle INC=\angle IDC$。

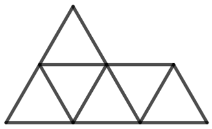
故$\angle AMI+\angle ANI=(180^\circ-\angle BMI)+(180^\circ-\angle CNI)$

$=(180^\circ-\angle BDI)+(180^\circ-\angle CDI)=360^\circ-(\angle BDI+\angle CDI)=360^\circ-180^\circ=180^\circ$，

$\Rightarrow$ A、M、I、N四點共圓。

綜合以上可知A、M、I、O、N五點共圓，證畢。

6-6 小綠有無窮多個相同的「拼片」，
拼片的樣子如右，每一個拼片都是由
6 個邊長為 1 的正三角形所構成。
小綠想用這些拼片（可以任意轉動，也可以翻轉）
拼成一個邊長為 n 的正三角形（完整的正三角形，中間不可有空洞），
請問 n 的最小值為何？

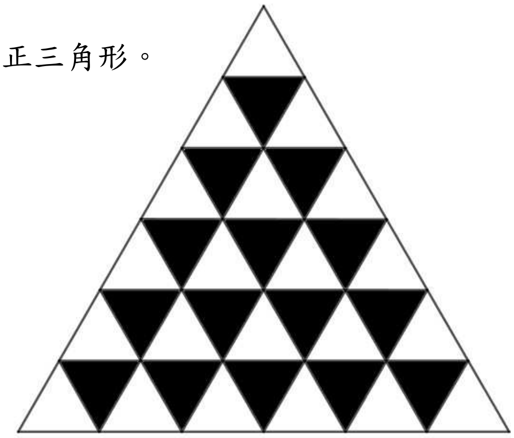


答：12。

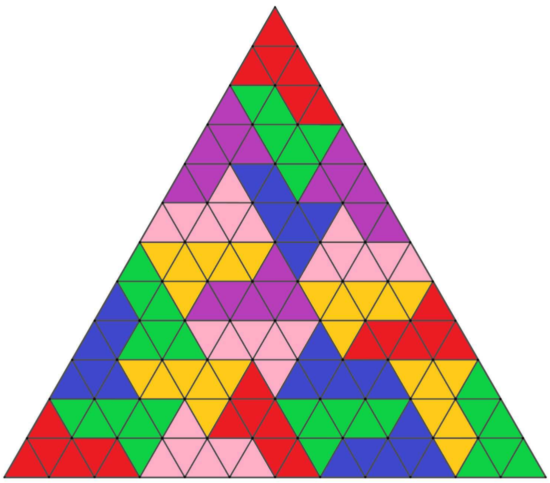
解：

假設邊長為 1 的正三角形面積為 a，則每一個拼片的面積為 $6a$。
邊長為 n 的正三角形面積是邊長為 1 的正三角形面積的 n^2 倍，
所以邊長為 n 的正三角形面積為 n^2a。
如果邊長為 n 的正三角形可用拼片拼成，則 n^2a 必須是 $6a$ 的整數倍，
故 n^2 是 6 的倍數，所以 n 也是 6 的倍數。

先考慮 $n=6$ 的情形：
如果將邊長 6 的正三角形塗色成黑白相間的小正三角形。
每一個拼片無論怎麼擺，
一定會蓋住「2 黑 4 白」或「4 黑 2 白」
所以 6 個拼片會蓋住的黑色小正三角形
一定是偶數個。
但右圖的黑色小正三角形個數為 15，
所以拼片無論怎麼擺，
都不可能拼成邊長 6 的正三角形。



再考慮 $n=12$ 的情形：
如右圖，可知用 24 個拼片可以拼成
邊長 12 的正三角形。



故 n 的最小值為 12。