

北一女中 107 學年度下學期《數戰數決》有獎徵答活動

第五期題目：

2019 年 05 月 02 日下午 1 點鐘截止

5-1 對於實數 x ，令 $[x]$ 表示 x 的整數部分、 $\{x\}$ 表示 x 的小數部分。
例如： $[3.14]=3$ 、 $\{3.14\}=0.14$ ； $[-3.14]=-4$ 、 $\{-3.14\}=0.86$ 。
試求滿足方程式： $[x]\cdot\{x\}=2019x$ 的所有實數 x 。

5-2 已知 $F_n = 2^{(2^n)} + 1$ ，其中 $n=0,1,2,\dots$ ，請證明： F_n 不可能是完全立方數。

【註】 F_n 被稱為費馬數。

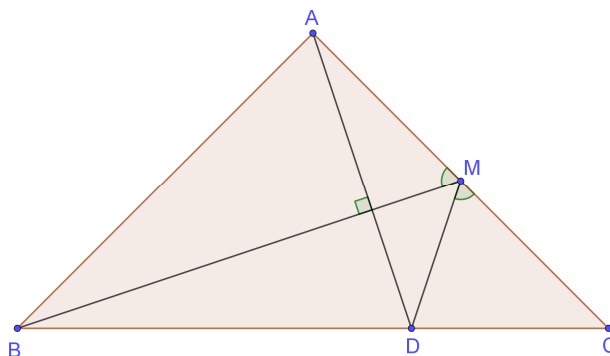
5-3 已知 $\triangle ABC$ 為等腰直角三角形，

其中 $\overline{AB} = \overline{AC}$ ，如右圖。

取 \overline{AC} 中點 M ，連接 \overline{BM} ，

再過 A 點作 \overline{BM} 之垂線交 \overline{BC} 於點 D 。

請證明： $\angle AMB = \angle CMD$ 。



數戰數決網站

臉書粉絲專頁



請務必記得，每一期的徵答題在截止日期前

都不能在粉絲頁上討論喔！

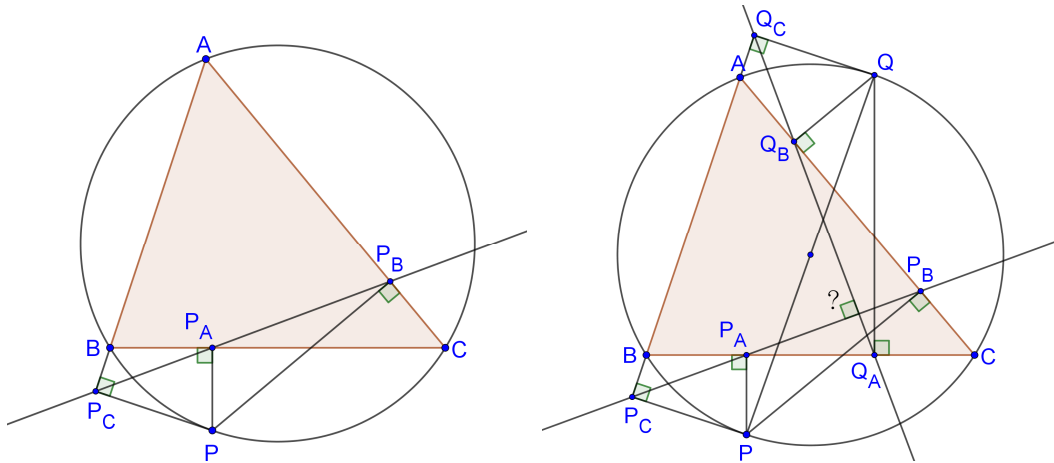
5-4 定義 $a_n = \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}$ ，其中 $n = 2, 3, 4, \dots, 2019$ 。

請證明： $a_2 \times a_3 \times a_4 \times \dots \times a_{2019} > \frac{2}{3}$ 。

5-5 已知 $\triangle ABC$ 的外接圓為 Γ 。

(1) 取圓 Γ 上一點 P (異於 A, B, C)，過 P 點分別向直線 BC 、直線 CA 、直線 AB 作垂足，令垂足分別為 P_A, P_B, P_C ，請證明： P_A, P_B, P_C 共線。

(2) 假設(1)中 P_A, P_B, P_C 所在的直線為 L_P 。同理，取圓 Γ 上另一點 Q 也可作出另一條直線 L_Q 。請證明：若 \overline{PQ} 為圓 Γ 的直徑，則 $L_P \perp L_Q$ 。



5-6 小綠有一個 $3 \times 3 \times 3$ 的立方體，總共有 27 個小方格。

現在小綠將 $1, 2, 3, \dots, 27$ 填入小方格，每一個小方格填入一個數，且每個數都恰好填入一次。

小綠計算同一排三個小方格內的數的總和，共得到 27 個這樣的總和。

(左右方向有 9 個總和、前後方向有 9 個總和、上下方向有 9 個總和，如右圖所示。)

小綠發現這 27 個總和之中，有 N 個是奇數，請問： N 的最大可能值為何？

