北一女中 107 學年度下學期《數戰數決》有獎徵答活動

第五期解答：

5-1 對於實數 x，令 $[x]$ 表示 x 的整數部分、$\{x\}$ 表示 x 的小數部分。
例如：$[3.14]=3$ 、$\{3.14\}=0.14$ ；$[-3.14]=-4$ 、$\{-3.14\}=0.86$ 。
試求滿足方程式：$[x]\cdot\{x\}=2019x$ 的所有實數 x。

答：$x=0$ 或 $-\dfrac{1}{2020}$ 。

解：

假設 $[x]=n$ 且 $\{x\}=a$ ，則 $x=n+a$ 。

所以 $[x]\cdot\{x\}=2019x \Rightarrow na=2019(n+a)$

$$\Rightarrow na-2019a=2019n \Rightarrow a=\frac{2019n}{n-2019}\text{ 。}$$

因為 a 是 x 的小數部分，所以 $0\le \dfrac{2019n}{n-2019}<1$ 。

由 $\dfrac{2019n}{n-2019}\ge 0 \Rightarrow n(n-2019)\ge 0$ 且 $n\ne 2019$ ，故 $n\le 0$ 或 $n\ge 2020$ 。

Case 1. 若 $n\le 0$ ，則 $\dfrac{2019n}{n-2019}<1 \Rightarrow 2019n>n-2019 \Rightarrow 2018n>-2019$

$$\Rightarrow n>-\frac{2019}{2018} \Rightarrow n=0 \text{ 或 } -1\text{ 。}$$

當 $n=0$ 時，$a=\dfrac{2019n}{n-2019}=0$，此時 $x=n+a=0$ 。

當 $n=-1$ 時，$a=\dfrac{2019n}{n-2019}=\dfrac{-2019}{-2020}=\dfrac{2019}{2020}$ ，此時 $x=n+a=-\dfrac{1}{2020}$ 。

Case 2. 若 $n\ge 2020$ ，則 $\dfrac{2019n}{n-2019}<1 \Rightarrow 2019n<n-2019 \Rightarrow 2018n<-2019$

$$\Rightarrow n<-\frac{2019}{2018} \text{ 與 } n\ge 2020 \text{ 矛盾。}$$

綜合以上所述，可知 $x=0$ 或 $-\dfrac{1}{2020}$ ，代回原方程式檢驗亦符合。

5-2 已知$F_n = 2^{(2^n)} + 1$，其中$n = 0,1,2,\cdots\cdots$，請證明：F_n不可能是完全立方數。

【註】F_n被稱為費馬數。

解：

假設$F_n = 2^{(2^n)} + 1 = m^3$，其中$m \in \mathbb{N}$。

由$2^{(2^n)} = m^3 - 1 = (m-1)(m^2+m+1)$，

可假設$\begin{cases} m-1 = 2^\alpha \\ m^2+m+1 = 2^\beta \end{cases}$，其中$\alpha, \beta$為非負整數，且滿足$\alpha + \beta = 2^n$。

因為$m, m+1$為連續整數，故必恰有一者為偶數，
所以$m(m+1)$為偶數$\Rightarrow m^2+m+1 = m(m+1)+1$為奇數，亦即$2^\beta$為奇數，
此時必有$\beta = 0$，於是$m^2+m+1 = 2^\beta = 1 \Rightarrow m = 0$或$-1$，與$m \in \mathbb{N}$矛盾，
故F_n不可能是完全立方數，證畢。

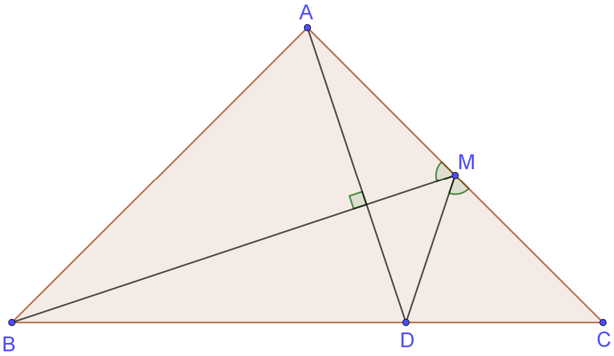
5-3　已知$\triangle ABC$為等腰直角三角形，

其中$\overline{AB}=\overline{AC}$，如右圖。

取$\overline{AC}$中點M，連接$\overline{BM}$，

再過A點作$\overline{BM}$之垂線交$\overline{BC}$於點D。

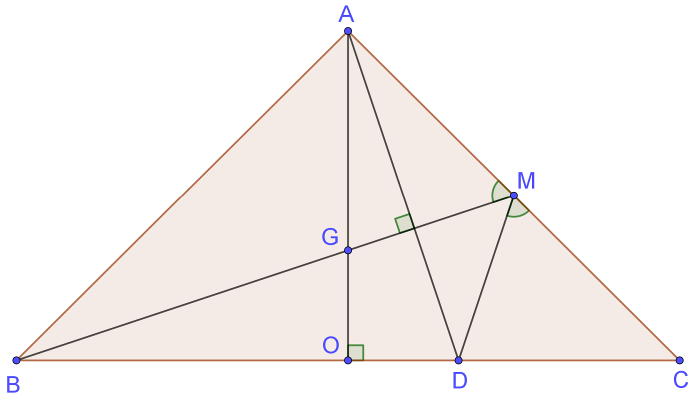
請證明：$\angle AMB=\angle CMD$。



解：

如右圖，取$\overline{BC}$中點為O，

連接$\overline{AO}$，令$\overline{AO}$與$\overline{BM}$交於點G。



因為$\triangle ABC$為等腰直角三角形，

且$\overline{AB}=\overline{AC}$、$\overline{BC}$中點為$O$，

所以$\angle BAO=45^\circ$。

又因為$\angle BAC=90^\circ$且$\overline{AD}\perp\overline{BM}$，所以$\angle ABG=90^\circ-\angle BAD=\angle CAD$。

因為$\angle BAG=45^\circ=\angle ACD$、$\overline{AB}=\overline{AC}$、$\angle ABG=\angle CAD$，

所以$\triangle BAG\cong\triangle ACD$（ASA 全等性質）$\Rightarrow\overline{AG}=\overline{CD}$。

因為$\overline{AG}=\overline{CD}$、$\overline{AM}=\overline{CM}$、$\angle GAM=45^\circ=\angle DCM$，

所以$\triangle GAM\cong\triangle DCM$（SAS 全等性質）$\Rightarrow\angle AMB=\angle CMD$，證畢。

5-4 定義 $a_n=\dfrac{n^3-1}{n^3+1}$，其中 $n=2,3,4,\cdots\cdots,2019$。

請證明： $a_2\times a_3\times a_4\times\cdots\cdots\times a_{2019}>\dfrac{2}{3}$。

解：

$a_n=\dfrac{n^3-1}{n^3+1}=\dfrac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)(n^2-n+1)}$，令 $b_n=n^2+n+1$、$c_n=n^2-n+1$，

因為 $\begin{cases} b_n=n^2+n+1=n\cdot(n+1)+1 \\ c_n=n^2-n+1=(n-1)\cdot n+1 \end{cases}$，所以 $c_{n+1}=b_n$。

故 $a_2\times a_3\times a_4\times\cdots\cdots\times a_{2019}$

$=\dfrac{1\cdot b_2}{3\cdot c_2}\times\dfrac{2\cdot b_3}{4\cdot c_3}\times\dfrac{3\cdot b_4}{5\cdot c_4}\times\cdots\cdots\times\dfrac{2017\cdot b_{2018}}{2019\cdot c_{2018}}\times\dfrac{2018\cdot b_{2019}}{2020\cdot c_{2019}}$

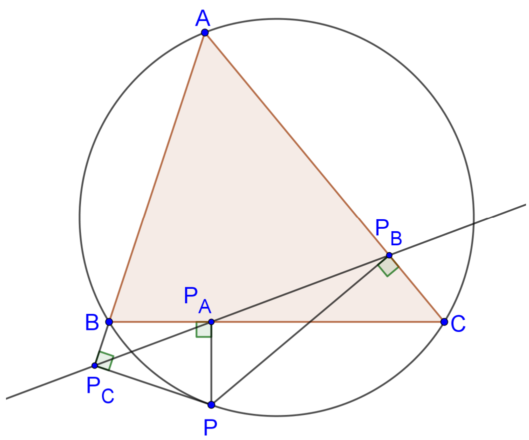
$=\dfrac{1\cdot b_2}{3\cdot b_1}\times\dfrac{2\cdot b_3}{4\cdot b_2}\times\dfrac{3\cdot b_4}{5\cdot b_3}\times\cdots\cdots\times\dfrac{2017\cdot b_{2018}}{2019\cdot b_{2017}}\times\dfrac{2018\cdot b_{2019}}{2020\cdot b_{2018}}$（因為 $c_{n+1}=b_n$）

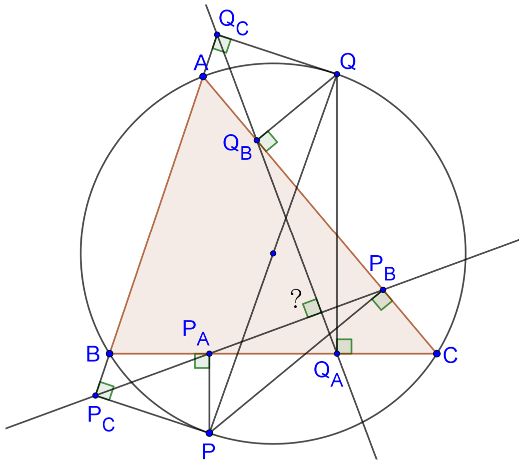
$=\dfrac{1\cdot 2\cdot b_{2019}}{2019\cdot 2020\cdot b_1}=\dfrac{1\cdot 2\cdot(2019\cdot 2020+1)}{2019\cdot 2020\cdot(1\cdot 2+1)}>\dfrac{1\cdot 2\cdot(2019\cdot 2020)}{2019\cdot 2020\cdot 3}=\dfrac{2}{3}$，證畢。

5-5 已知$\triangle ABC$的外接圓為Γ。

(1) 取圓Γ上一點P（異於A、B、C），過P點分別向直線BC、直線CA、直線AB作垂足，令垂足分別為P_A,P_B,P_C，請證明：P_A,P_B,P_C共線。

(2) 假設(1)中P_A,P_B,P_C所在的直線為L_P。同理，取圓Γ上另一點Q也可作出另一條直線L_Q。請證明：若$\overline{PQ}$為圓Γ的直徑，則$L_P \perp L_Q$。





解：

(1) 因為$\angle PP_AB = \angle PP_CB = 90^\circ$，所以$P,P_A,B,P_C$四點共圓。
同理亦可證明P,P_A,P_B,C四點共圓，又P,B,A,C也四點共圓，
所以$\angle BP_AP_C = \angle BPP_C = 90^\circ - \angle P_CBP = 90^\circ - \angle PCA$
$= 90^\circ - (180^\circ - \angle PP_AP_B) = \angle PP_AP_B - 90^\circ = \angle CP_AP_B$，
故P_A,P_B,P_C共線，證畢。

(2) 由(1)之證明過程可知P,P_A,P_B,C四點共圓，所以$\angle P_AP_BP = \angle P_ACP$；
同理亦可證明Q_A,Q_B,Q,C四點共圓，所以$\angle Q_BQ_AQ = \angle Q_BCQ$。
因為$\angle Q_BQ_AC + \angle Q_ACP_B + \angle CP_BP_A$

$= (\angle Q_BQ_AQ + 90^\circ) + \angle Q_ACP_B + (90^\circ + \angle PP_BP_A)$

$= (\angle Q_BCQ + 90^\circ) + \angle Q_ACP_B + (90^\circ + \angle PCP_A)$

$= (\frac{1}{2}\overset{\frown}{AQ} + 90^\circ) + \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB} + (90^\circ + \frac{1}{2}\overset{\frown}{PB})$

$= 180^\circ + \frac{1}{2}\overset{\frown}{QABP} = 180^\circ + \frac{1}{2}\times 180^\circ$（因為$\overline{PQ}$為圓$\Gamma$的直徑）

$= 270^\circ$，故$L_P \perp L_Q$，證畢。

5-6 小綠有一個$3\times3\times3$的立方體，總共有 27 個小方格。

現在小綠將$1,2,3,\cdots\cdots,27$填入小方格，每一個小方格填入一個數，且每個數都恰好填入一次。

小綠計算同一排三個小方格內的數的總和，共得到 27 個這樣的總和。

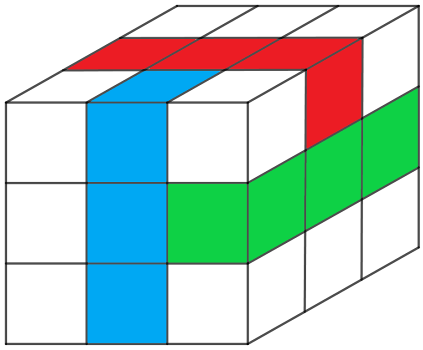
（左右方向有 9 個總和、

前後方向有 9 個總和、

上下方向有 9 個總和，如右圖所示。）

小綠發現這 27 個總和之中，有 N 個是奇數，

請問：N 的最大可能值為何？



答：24。

解：

假設左右方向的 9 個總和分別為$a_1,a_2,a_3,\cdots\cdots,a_9$，

前後方向的 9 個總和分別為$b_1,b_2,b_3,\cdots\cdots,b_9$，

上下方向的 9 個總和分別為$c_1,c_2,c_3,\cdots\cdots,c_9$，

則$\sum_{k=1}^{9}a_k=\sum_{k=1}^{9}b_k=\sum_{k=1}^{9}c_k=1+2+3+\cdots\cdots+27=\dfrac{27\times28}{2}=378$為偶數。

因為$\sum_{k=1}^{9}a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_9=378$為偶數，

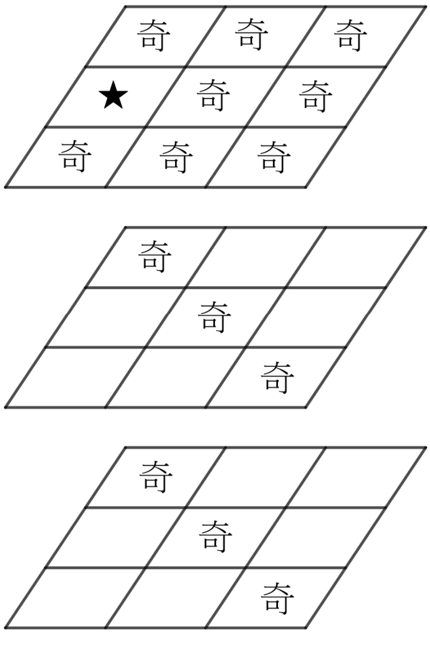
所以$a_1,a_2,a_3,\cdots\cdots,a_9$中至多只能有 8 個奇數，

同理，$b_1,b_2,b_3,\cdots\cdots,b_9$中至多只能有 8 個奇數；

$c_1,c_2,c_3,\cdots\cdots,c_9$中至多只能有 8 個奇數。

故必有$N\le24$。

以下構造一個$N=24$的例子：



如右圖，在對應的方格內放入奇數，其餘的方格放入偶數。

則除了★那一格所在的三方向的總和是偶數，其它的三方格總和都是奇數，即符合題目的要求。

故 24 確實是 N 的最大值。