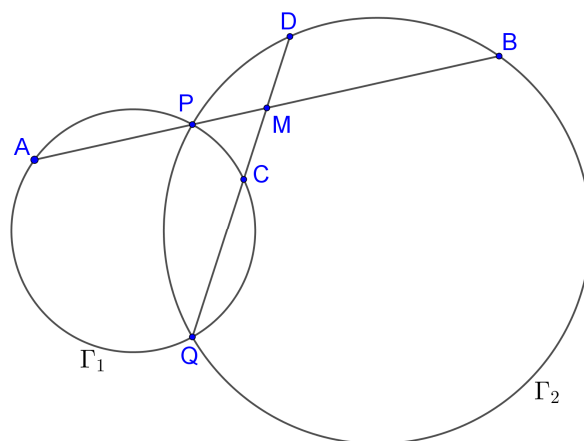


北一女中 107 學年度下學期《數戰數決》有獎徵答活動

第四期題目：

2019 年 03 月 21 日下午 1 點鐘截止

- 4-1 如右圖，已知平面上有兩圓 Γ_1, Γ_2 交於 P, Q 兩點。過 P 點作一直線分別交 Γ_1 於點 A 、交 Γ_2 於點 B ，取 \overline{AB} 中點為 M 。



連接直線 QM ，若直線 QM 分別交 Γ_1 於點 C 、交 Γ_2 於點 D 。

請證明： M 也是 \overline{CD} 的中點。

- 4-2 對於兩整數 m, n ，我們定義 $m \otimes n = m + n - mn$ 。
請找出所有的整數三元序對 (x, y, z) ，滿足方程式：

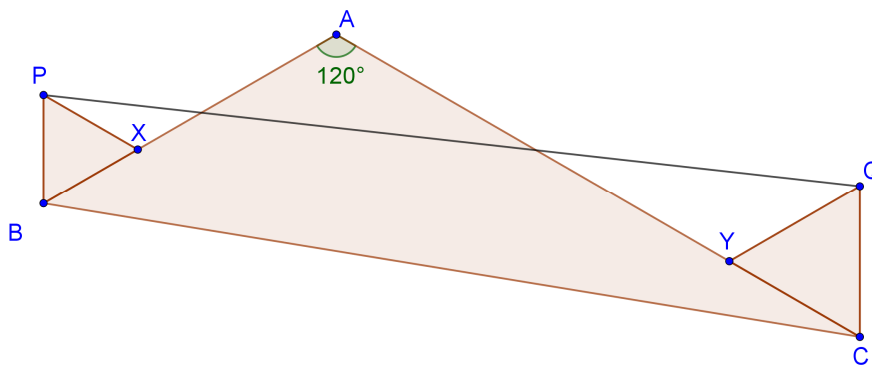
$$[(x \otimes y) \otimes z] + [(y \otimes z) \otimes x] + [(z \otimes x) \otimes y] = 0。$$

- 4-3 已知 $f(x)$ 為整係數多項式，且滿足 $f(-2019) < f(2019) < 2019$ ，
請證明： $f(-2019) < -2019$ 。

- 4-4 如下圖，已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 120^\circ$ 。在 $\overline{AB}, \overline{AC}$ 上各取一點 X, Y ，再分別

由 $\overline{BX}, \overline{CY}$ 向 $\triangle ABC$ 外部作正三角形為 $\triangle BXP, \triangle CYQ$ ，最後連接 \overline{PQ} 。

請證明： $\overline{PQ} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(\overline{AB} + \overline{AC})$ 。

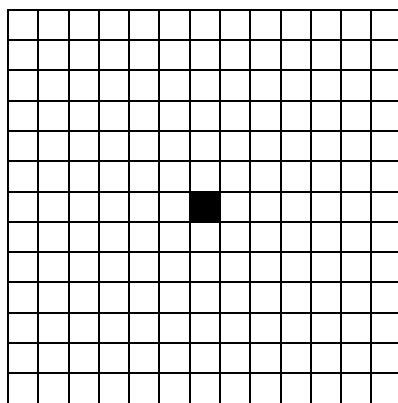


4-5 請找出一個滿足下列所有條件的無窮數列 $\langle a_k \rangle$ （意即無窮多項的數列）：

- (1) $\langle a_k \rangle$ 的每一項都是正整數。
- (2) $\langle a_k \rangle$ 是等差數列，且公差大於0。
- (3) $\langle a_k \rangle$ 的每一項都不能表示成兩整數的平方和，意即不是 $m^2 + n^2$ 的形式。
- (4) $\langle a_k \rangle$ 的每一項都不能表示成兩整數的立方和，意即不是 $m^3 + n^3$ 的形式。

4-6 小綠有42張 1×4 的黑色貼紙，以及一個 13×13 的方格表，但是這個方格表正中央的方格已經塗黑（如下圖），而其它方格都是白色。

請問小綠是否能夠利用這42張黑色貼紙將方格表貼滿，使得整張方格表都是黑色？



數戰數決網站

臉書粉絲專頁



請務必記得，每一期的徵答題在截止日期前

都不能在粉絲頁上討論喔！