北一女中 107 學年度下學期《數戰數決》有獎徵答活動

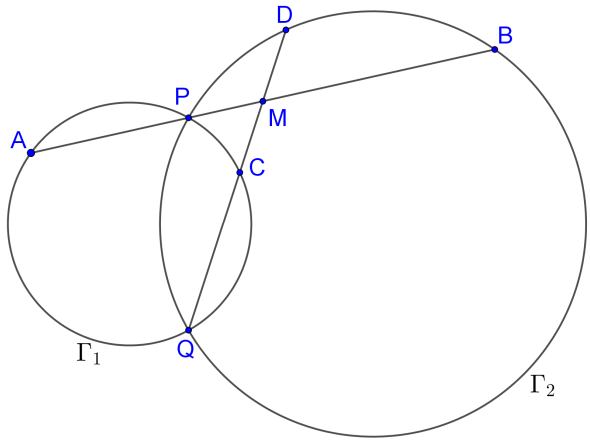
第四期解答：

4-1 如右圖，已知平面上有兩圓Γ_1,Γ_2交於P,Q兩點。過P點作一直線分別交Γ_1於點A、交Γ_2於點B，

取$\overline{AB}$中點為M。

連接直線QM，若直線QM分別交Γ_1於點C、交Γ_2於點D。

請證明：M也是$\overline{CD}$的中點。



解：

對圓Γ_1使用圓冪定理可知：$\overline{MP}\cdot\overline{MA}=\overline{MQ}\cdot\overline{MC}$；

對圓Γ_2使用圓冪定理可知：$\overline{MP}\cdot\overline{MB}=\overline{MQ}\cdot\overline{MD}$，

因為$\overline{AB}$中點為M，所以$\overline{MA}=\overline{MB}$，

故$\overline{MQ}\cdot\overline{MC}=\overline{MP}\cdot\overline{MA}=\overline{MP}\cdot\overline{MB}=\overline{MQ}\cdot\overline{MD}\Rightarrow\overline{MC}=\overline{MD}$，

亦即M為$\overline{CD}$的中點，證畢。

4-2 對於兩整數m,n，我們定義$m\otimes n=m+n-mn$。

請找出所有的整數三元序對(x,y,z)，滿足方程式：

$$[(x\otimes y)\otimes z]+[(y\otimes z)\otimes x]+[(z\otimes x)\otimes y]=0\text{。}$$

答：$(x,y,z)=(0,0,0)$ 或 $(2,2,0)$ 或 $(2,0,2)$ 或 $(0,2,2)$。

解：

$m\otimes n=m+n-mn=1-(1-m-n+mn)=1-(1-m)(1-n)$，

所以
$$\begin{aligned}(x\otimes y)\otimes z&=1-\{1-[x\otimes y]\}(1-z)\\&=1-\{1-[1-(1-x)(1-y)]\}(1-z)\\&=1-\{(1-x)(1-y)\}(1-z)=1-(1-x)(1-y)(1-z)\text{，}\end{aligned}$$

同理可得$(y\otimes z)\otimes x=1-(1-y)(1-z)(1-x)$ 且 $(z\otimes x)\otimes y=1-(1-z)(1-x)(1-y)$，

所以原方程式：
$$\begin{aligned}&[(x\otimes y)\otimes z]+[(y\otimes z)\otimes x]+[(z\otimes x)\otimes y]=0\\&\Rightarrow 3-3(1-x)(1-y)(1-z)=0\\&\Rightarrow (1-x)(1-y)(1-z)=1\text{。}\end{aligned}$$

又因為$x,y,z\in\mathbb{Z}$，所以$\begin{cases}1-x=1\\1-y=1\\1-z=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}1-x=-1\\1-y=-1\\1-z=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}1-x=-1\\1-y=1\\1-z=-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}1-x=1\\1-y=-1\\1-z=-1\end{cases}$，

故$(x,y,z)=(0,0,0)$ 或 $(2,2,0)$ 或 $(2,0,2)$ 或 $(0,2,2)$。

4-3 已知$f(x)$為整係數多項式，且滿足$f(-2019)<f(2019)<2019$，

請證明：$f(-2019)<-2019$。

解：

假設$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$，

則
$$\begin{aligned}f(2019)-f(-2019)&=\sum_{k=0}^{n}a_k(2019)^k-\sum_{k=0}^{n}a_k(-2019)^k\\&=2a_1\cdot 2019+2a_3\cdot 2019^3+2a_5\cdot 2019^5+\cdots\cdots\\&=2\cdot 2019\cdot N\text{，其中 }N\text{ 為某個整數。}\end{aligned}$$

因為$f(-2019)<f(2019)$，所以N必為正整數$\Rightarrow N\geq 1$。

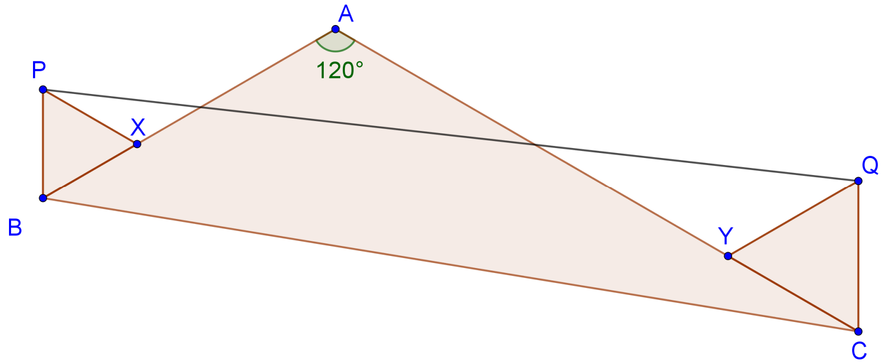
於是$f(2019)-f(-2019)=2\cdot 2019\cdot N\geq 2\cdot 2019$，

故$f(-2019)\leq f(2019)-2\cdot 2019<2019-2\cdot 2019=-2019$

亦即$f(-2019)<-2019$，證畢。

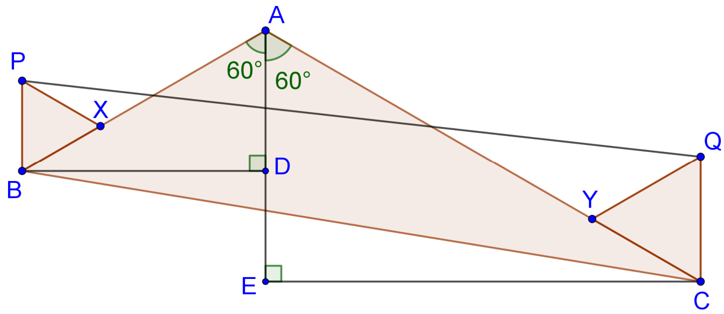
4-4 如下圖，已知$\triangle ABC$中，$\angle A=120°$。在$\overline{AB},\overline{AC}$上各取一點$X,Y$，再分別由$\overline{BX},\overline{CY}$向$\triangle ABC$外部作正三角形為$\triangle BXP,\triangle CYQ$，最後連接$\overline{PQ}$。

請證明：$\overline{PQ}\ge\dfrac{\sqrt{3}}{2}(\overline{AB}+\overline{AC})$。



解：

如下圖，先作$\angle BAC$的平分線，再分別過點B、C對此角平分線作垂線，令垂足分別為D、E。



因為$\angle PBX=60°=\angle BAD$，所以$\overline{PB}\,//\,\overline{AD}$；

因為$\angle QCY=60°=\angle CAE$，所以$\overline{QC}\,//\,\overline{AE}$；故$\overline{PB}\,//\,\overline{QC}$。

$\overline{PQ}\ge$兩平行直線PB與QC的距離

$=$兩平行直線PB與AD的距離$+$兩平行直線AE與QC的距離

$=\overline{BD}+\overline{CE}$（因為$\angle BDA=\angle CEA=90°$）

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\overline{AB}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\overline{AC}$（因為$\angle BAD=\angle CAE=60°$）

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(\overline{AB}+\overline{AC})$，證畢。

4-5 請找出一個滿足下列所有條件的無窮數列$\langle a_k \rangle$（意即無窮多項的數列）：

(1) $\langle a_k \rangle$的每一項都是正整數。

(2) $\langle a_k \rangle$是等差數列，且公差大於0。

(3) $\langle a_k \rangle$的每一項都不能表示成兩整數的平方和，意即不是m^2+n^2的形式。

(4) $\langle a_k \rangle$的每一項都不能表示成兩整數的立方和，意即不是m^3+n^3的形式。

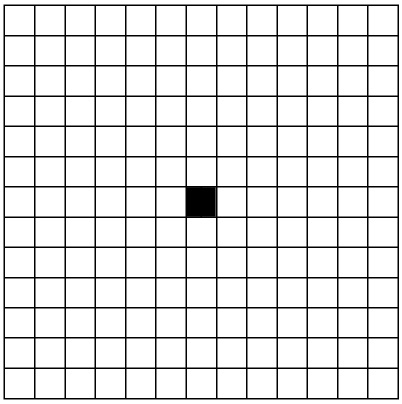
答：可取$\langle a_k \rangle = \langle 9k+3 \rangle : 12, 21, 30, 39, 48, 57, \cdots\cdots$。（答案不唯一）

解：
考慮各整數除以9的餘數。
完全平方數m^2除以9的餘數只可能是0或1或4或7，
所以m^2+n^2除以9的餘數只可能是0或1或2或4或5或7或8。
完全立方數m^3除以9的餘數只可能是0或1或8，
所以m^3+n^3除以9的餘數只可能是0或1或2或7或8。

故只要取$\langle a_k \rangle = \langle 9k+3 \rangle : 12, 21, 30, 39, 48, 57, \cdots\cdots$即可滿足題目的所有條件。

4-6 小綠有 42 張1×4的黑色貼紙，以及一個13×13的方格表，但是這個方格表正中央的方格已經塗黑（如下圖），而其它方格都是白色。

請問小綠是否能夠利用這 42 張黑色貼紙將方格表貼滿，使得整張方格表都是黑色？



答：否。

解：

如右圖，將每一個方格編號。
則小綠的貼紙蓋住的方格，
必定為下列情形之一：

①蓋住 1,2,3,4 各一格，假設有 a 張；
②蓋住四格 1，假設有 b 張；
③蓋住四格 2，假設有 c 張；
④蓋住四格 3，假設有 d 張；
⑤蓋住四格 4，假設有 e 張。

1	**2**	**3**	**4**	**1**	**2**	**3**	**4**	**1**	**2**	**3**	**4**	**1**
1	**2**	**3**	**4**	**1**	**2**	**3**	**4**	**1**	**2**	**3**	**4**	**1**
1	**2**	**3**	**4**	**1**	**2**	**3**	**4**	**1**	**2**	**3**	**4**	**1**
1	**2**	**3**	**4**	**1**	**2**	**3**	**4**	**1**	**2**	**3**	**4**	**1**
1	**2**	**3**	**4**	**1**	**2**	**3**	**4**	**1**	**2**	**3**	**4**	**1**
1	**2**	**3**	**4**	**1**	**2**	**3**	**4**	**1**	**2**	**3**	**4**	**1**
1	**2**	**3**	**4**	**1**	**2**		**4**	**1**	**2**	**3**	**4**	**1**
1	**2**	**3**	**4**	**1**	**2**	**3**	**4**	**1**	**2**	**3**	**4**	**1**
1	**2**	**3**	**4**	**1**	**2**	**3**	**4**	**1**	**2**	**3**	**4**	**1**
1	**2**	**3**	**4**	**1**	**2**	**3**	**4**	**1**	**2**	**3**	**4**	**1**
1	**2**	**3**	**4**	**1**	**2**	**3**	**4**	**1**	**2**	**3**	**4**	**1**
1	**2**	**3**	**4**	**1**	**2**	**3**	**4**	**1**	**2**	**3**	**4**	**1**
1	**2**	**3**	**4**	**1**	**2**	**3**	**4**	**1**	**2**	**3**	**4**	**1**

因為編號 2 的方格有 39 個，所以$a+4c=39$。

編號 3 的方格有 38 個，所以$a+4d=38$。

將兩式相減，可得$4(c-d)=1$，左端為 4 的倍數，右端為 1，矛盾。

所以小綠無法利用這 42 張黑色貼紙將方格表貼滿，使得整張方格表都是黑色。