北一女中 106 學年度下學期《數戰數決》有獎徵答活動

第六期解答：

2018 年 06 月 14 日下午 1 點鐘截止

6-1 請找出方程組 $\begin{cases} y=4x^3+12x^2+12x+3 \\ x=4y^3+12y^2+12y+3 \end{cases}$ 的所有實數解。

答：$(-1,-1)$ 、$(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ 、$(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2})$

解：

整理原方程組可得 $\begin{cases} y+1=4x^3+12x^2+12x+4=4(x+1)^3 \\ x+1=4y^3+12y^2+12y+4=4(y+1)^3 \end{cases}$ ，

所以 $x+1=4(y+1)^3=4[4(x+1)^3]^3=256(x+1)^9$ 。

於是 $(x+1)[1-256(x+1)^8]=0 \Rightarrow x+1=0$ 或 $(x+1)^8=\frac{1}{256}$ 。

若 $x+1=0$ ，則 $x=-1 \Rightarrow y+1=4(x+1)^3=0 \Rightarrow y=-1$ 。

若 $(x+1)^8=\frac{1}{256}$ ，則 $x+1=\pm\frac{1}{2} \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{3}{2}$ 。

　　當 $x=-\frac{1}{2}$ 時， $y+1=4(x+1)^3=\frac{1}{2} \Rightarrow y=-\frac{1}{2}$ 。

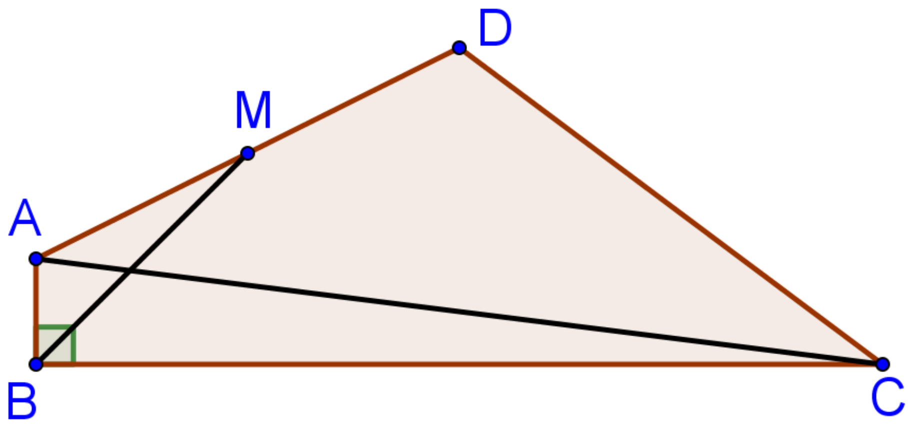
　　當 $x=-\frac{3}{2}$ 時， $y+1=4(x+1)^3=-\frac{1}{2} \Rightarrow y=-\frac{3}{2}$ 。

綜合以上所述，滿足方程組的實數解有 $(-1,-1)$ 、$(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ 、$(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2})$ 三組，

且將這三組數對代入原方程組亦可知其確實滿足方程組。

6-2　已知 $ABCD$ 為平面上的凸四邊形，且 $\angle ABC = 90°$。

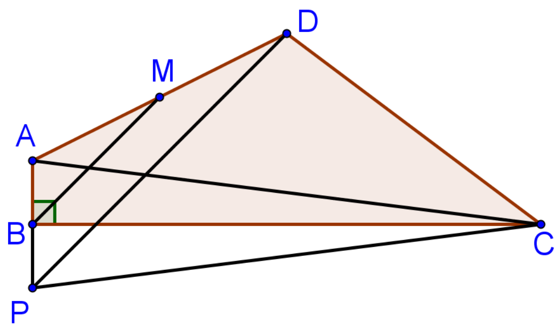
若 M 是 $\overline{AD}$ 的中點，連接 $\overline{MB}$ 、 $\overline{AC}$ ，請證明： $\overline{AC}+\overline{CD}\geq 2\overline{MB}$ 。



解：

延長 $\overline{AB}$ 至點 P 使得 $\overline{AB}=\overline{BP}$ ，

連接 $\overline{PC}$ 、 $\overline{PD}$ 。



因為 $\overline{AB}=\overline{BP}$ 、 $\overline{BC}=\overline{BC}$ ，

且 $\angle ABC = 90° = \angle PBC$ ，

所以 $\triangle ABC \cong \triangle PBC$（SAS 全等性質）$\Rightarrow \overline{PC}=\overline{AC}$ 。

又因為 M 是 $\overline{AD}$ 的中點且 $\overline{AB}=\overline{BP}$ ，所以 $\overline{PD}=2\overline{MB}$ 。

根據三角不等式可知 $\overline{PC}+\overline{CD}\geq\overline{PD}$ ，所以 $\overline{AC}+\overline{CD}\geq 2\overline{MB}$ ，證畢。

6-3 已知 $f(x)$ 是多項式函數。請找出所有滿足以下條件的 $f(x)$：

$f(1)=7$ 、 $f(2)=2018$ ，且 $f(x)$ 的每項係數都是非負整數。

答： $f(x)=x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x$ 。

解：

假設 $f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1 x + a_0$ ，其中 $a_n \neq 0$ ，

由題意可知所有 a_k 均為非負整數。

$$f(2)=a_n \cdot 2^n + a_{n-1}\cdot 2^{n-1}+\cdots\cdots+a_1\cdot 2^1 + a_0$$

$$=\underbrace{2^n+\cdots+2^n}_{共a_n項}+\underbrace{2^{n-1}+\cdots+2^{n-1}}_{共a_{n-1}項}+\cdots+\underbrace{2+\cdots+2}_{共a_1項}+\underbrace{1+\cdots+1}_{共a_0項}，$$

上式是 $a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0=f(1)=7$ 項「2 的非負冪次」之和。

先將 2018 表示成 $2^{10}+2^9+2^8+2^7+2^6+2^5+2^1$ ，

可知 2018 分拆成「2 的非負冪次」之和最少的項數就是 7 項，

所以 $f(2)=2018=2^{10}+2^9+2^8+2^7+2^6+2^5+2^1$

所對應的 $f(x)=x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x$ 。

6-4 如下圖，小綠做了一題直式乘法的練習，做完後他發現他寫下的每個數字恰好都是質數（亦即下圖中的每個英文字母都是 2、3、5、7 其中之一），請你把所有可能的直式乘法都完整寫出來，並寫明推論過程。

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & A & B & C \\
 & \times & & D & E \\
\hline
 & F & G & H & I \\
J & K & L & M & \\
\hline
V & W & X & Y & Z
\end{array}
$$

答：

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & 7 & 7 & 5 \\
 & \times & & 3 & 3 \\
\hline
 & 2 & 3 & 2 & 5 \\
2 & 3 & 2 & 5 & \\
\hline
2 & 5 & 5 & 7 & 5
\end{array}
$$

解：

由 $2\times2=4$、$2\times3=6$、$2\times5=10$、$2\times7=14$、$3\times3=9$、$3\times7=21$、$7\times7=49$，這些乘積的個位數字都不是質數，

所以 C×E 只可能是 3×5、5×5、5×7（兩數可交換順序）。

若 C=3，則 E=5，此時 $\begin{cases} B=2\Rightarrow H=1 \\ B=3\Rightarrow H=6 \\ B=5\Rightarrow H=6 \\ B=7\Rightarrow H=6 \end{cases}$，均不合題意。

若 C=7，則 E=5，此時 $\begin{cases} B=2\Rightarrow H=3 \\ B=3\Rightarrow H=8 \\ B=5\Rightarrow H=8 \\ B=7\Rightarrow H=8 \end{cases}$，只有 B=2、H=3 合題意。

但此時 $\begin{cases} A=2\Rightarrow G=1 \\ A=3\Rightarrow G=6 \\ A=5\Rightarrow G=6 \\ A=7\Rightarrow G=6 \end{cases}$，均不合題意。

故必有 C=5，此時可知 I=M=Z=5。

因為 M=5，所以 H 不能是 3、5、7，故 H 只能是 2，所以就有 Y=7。

因為 $C=I=5$ 且 $H=2$，

若 $E=5$，則 $B=3$、5、7 均會使 $H\neq2$，故 $B=2$，

但此時 $G=1$ 或 6，矛盾。

若 $E=7$，則 $B=2$、3、5 均會使 $H\neq2$，故 $B=7$，

但此時 $G=0$ 或 6 或 9，矛盾。

故必有 $E=3$，且此時 $B=2$、3、5 均會使 $H\neq2$，故 $B=7$。

因為 $C=5$、$B=7$、$E=3$，則 $A=2$、3、5 均會使 F 不是質數，

故 $A=7$。至此已可知被乘數為 775。

$775\times2=1550$ 、 $775\times3=2325$ 、 $775\times5=3875$ 、 $775\times7=5425$ ，

所以必有 $D=3$。

故最終可知題目所述的直式乘法只有一種可能，如下：

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & & 7 & 7 & 5 \\
 & \times & & 3 & 3 \\
\hline
 & 2 & 3 & 2 & 5 \\
2 & 3 & 2 & 5 & \\
\hline
2 & 5 & 5 & 7 & 5
\end{array}
$$

6-5 已知小綠總共包了 100 顆粽子，而這 100 顆粽子只分成 10 種口味。
請證明：小綠可以把這 100 顆粽子分裝成 10 盒，每一盒恰有 10 顆粽子，
且每一盒都至多只包含 2 種口味的粽子。

解：

假設第 k 種口味的粽子有 a_k 顆，則 $\sum_{k=1}^{10} a_k = 100$。

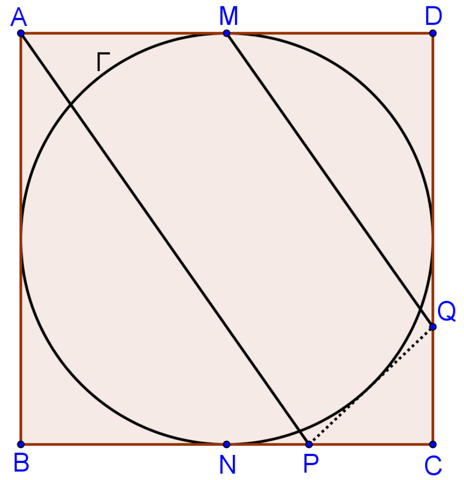
不妨假定 $a_1 \le a_2 \le \cdots\cdots \le a_{10}$，則顯然 $a_{10} \ge 10$ 且 $a_1 \le 10$（10 是平均數）。
小綠可將第 1 種口味的 a_1 顆粽子與第 10 種口味的 $10 - a_1$ 顆粽子裝成一盒，
則剩下的 90 顆粽子只有 9 種口味。

依上述方法，可將 90 顆粽子依口味分成 9 類，每類有 b_k 顆，則 $\sum_{k=1}^{10} b_k = 90$。

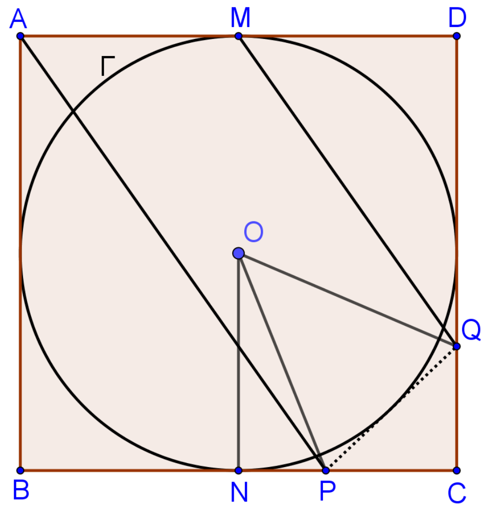
不妨假定 $b_1 \le b_2 \le \cdots\cdots \le b_9$，則顯然 $b_9 \ge 10$ 且 $b_1 \le 10$（10 是平均數）。
小綠可將第 1 類的 b_1 顆粽子與第 10 種口味的 $10 - b_1$ 顆粽子再裝成一盒，
則剩下的 80 顆粽子只有 8 種口味。

以此類推可知，小綠可以仿此步驟，以滿足題目所述的裝盒方法。

6-6 如下圖，已知 $ABCD$ 為正方形，令 Γ 為其內切圓，且 Γ 與 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BC}$ 分別相切於點 M、N。在 $\overline{NC}$ 取一點 P，連接 $\overline{AP}$ ；再於 $\overline{CD}$ 上取一點 Q，使得 $\overline{MQ}//\overline{AP}$ 。連接 $\overline{PQ}$ ，請證明： $\overline{PQ}$ 與 Γ 相切。



解：



不妨假設正方形 $ABCD$ 的邊長為 2，

令 Γ 圓心為 O，連接 $\overline{ON},\overline{OP},\overline{OQ}$ 。

假設 $\overline{NP}=x$ 。

因為 $\overline{MQ}//\overline{AP}$ ，所以 $\triangle ABP \sim \triangle QDM$，

故 $\dfrac{\overline{BP}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{DM}}{\overline{DQ}} \Rightarrow \dfrac{1+x}{2}=\dfrac{1}{\overline{DQ}} \Rightarrow \overline{DQ}=\dfrac{2}{1+x}$ ，

$\overline{CQ}=2-\overline{DQ}=2-\dfrac{2}{1+x}=\dfrac{2x}{1+x}$ 。

$\triangle OPQ$ 面積＝梯形 $ONCQ$ 面積－$\triangle OPN$ 面積－$\triangle CPQ$ 面積

$$=\frac{(\overline{ON}+\overline{CQ})\cdot\overline{CN}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\overline{PN}\cdot\overline{ON}-\frac{1}{2}\cdot\overline{CP}\cdot\overline{CQ}$$

$$=\frac{(1+\frac{2x}{1+x})\cdot 1}{2}-\frac{1}{2}\cdot x\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot(1-x)\cdot\frac{2x}{1+x}=\frac{1+x^2}{2(1+x)} 。$$

又 $\overline{PQ}^2=\overline{CP}^2+\overline{CQ}^2=(1-x)^2+(\dfrac{2x}{1+x})^2=\dfrac{(1+x^2)^2}{(1+x)^2} \Rightarrow \overline{PQ}=\dfrac{1+x^2}{1+x}$ ，

所以 O 到 $\overline{PQ}$ 的距離＝$2\triangle OPQ$ 面積 $\div\overline{PQ}=1$ ，故 $\overline{PQ}$ 與 Γ 相切，證畢。