

# 北一女中 106 學年度下學期《數戰數決》有獎徵答活動

## 第五期題目：

2018 年 05 月 03 日下午 1 點鐘截止

5-1 已知  $a, b, c \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ ，試求  $\frac{1}{\left(\frac{a+2018}{\left(\frac{b+1}{c}\right)}\right)}$  的最大值。

5-2 已知  $a_1, a_2, \dots, a_{2018}$  這 2018 個數，有  $a_k = 1$  或  $-1$  ( $k = 1, 2, \dots, 2018$ )。從這 2018 個數之中任取兩數相乘之後，再將所有這樣的乘積加總而得一數  $S$  (意即  $S = \sum_{1 \leq i < j \leq 2018} a_i a_j = a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_1 a_4 + \dots + a_{2017} a_{2018}$ )。

試求  $|S|$  的最小值。

5-3 如下圖，平面上有一個  $8 \times 8$  的方格表。

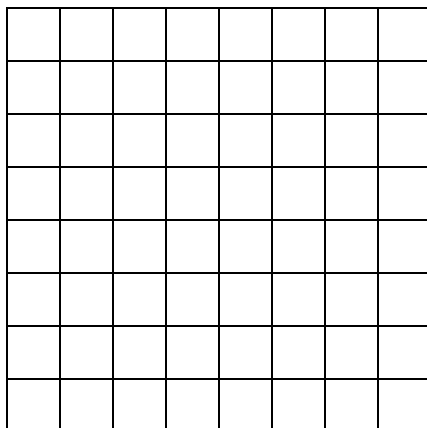
小綠想在此平面上作一條直線，使得這條直線「穿過」最多的方格。

請問小綠作的直線最多可以穿過幾個方格？

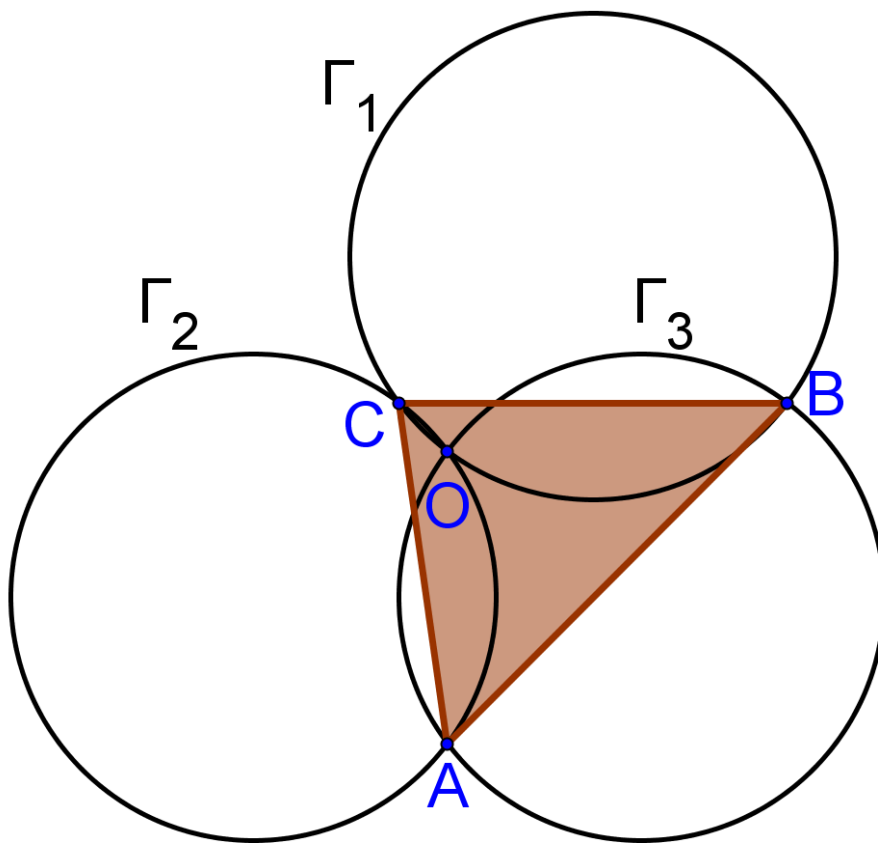
並請證明你的答案確實是「最多」的。

註：所謂的「穿過方格」，是指此直線必須通過方格的內部。

如果直線只與方格的邊界或頂點接觸，就不算是穿過方格。



- 5-4 如下圖，已知平面上有三個半徑均為  $r$  的圓  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  均通過點  $O$ ，且  $\Gamma_1, \Gamma_2$  交於  $O, C$  兩點； $\Gamma_2, \Gamma_3$  交於  $O, A$  兩點； $\Gamma_3, \Gamma_1$  交於  $O, B$  兩點。請證明： $\triangle ABC$  的外接圓半徑長也是  $r$ 。



- 5-5 綠園中有 12 位女孩與 30 隻貓要圍坐成一圈，並滿足鄰近的兩位女孩之間，都至少要有 2 隻貓。請問有多少種不同的圍坐方法？（答案無須乘開）

- 5-6 已知  $p, q$  為兩質數且滿足  $p \leq q$ 。若  $p \mid 7q+1$  且  $q \mid 7p+1$ ，試求數對  $(p, q)$ 。