北一女中 106 學年度下學期《數戰數決》有獎徵答活動

第五期解答：

2018 年 05 月 03 日下午 1 點鐘截止

5-1　已知$a,b,c\in\{1,2,3,\cdots\cdots,9\}$，試求$\dfrac{1}{\left(\dfrac{a+2018}{(\frac{b+1}{c})}\right)}$的最大值。

答：$\dfrac{10}{2019}$

解：

欲使$\dfrac{1}{\left(\dfrac{a+2018}{(\frac{b+1}{c})}\right)}$最大，就等同於使得$\dfrac{a+2018}{(\frac{b+1}{c})}$最小，

所以可取$a=1$，且再使$\dfrac{b+1}{c}$最大，

而這只需取$b=9$且$c=1$。

而當$a=1$、$b=9$、$c=1$時，$\dfrac{1}{\left(\dfrac{a+2018}{(\frac{b+1}{c})}\right)}=\dfrac{1}{\left(\dfrac{2019}{(\frac{10}{1})}\right)}=\dfrac{10}{2019}$。

5-2 已知$a_1,a_2,\cdots\cdots,a_{2018}$這 2018 個數，有$a_k=1$或$-1$（$k=1,2,\cdots\cdots,2018$）。從這 2018 個數之中任取兩數相乘之後，再將所有這樣的乘積加總而得一數S（意即$S=\sum\limits_{1\le i<j\le 2018}a_ia_j=a_1a_2+a_1a_3+a_1a_4+\cdots\cdots+a_{2017}a_{2018}$）。

試求$|S|$的最小值。

答：41。

解：

因為$a_k=1$或-1，所以$\sum\limits_{k=1}^{2018}{a_k}^2=2018$，且$-2018\le\sum\limits_{k=1}^{2018}a_k\le 2018$。

$$S=\sum_{1\le i<j\le 2018}a_ia_j=\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{2018}a_k\right)^2-\sum\limits_{k=1}^{2018}{a_k}^2}{2}=\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{2018}a_k\right)^2-2018}{2}，$$

因為$-2018\le\sum\limits_{k=1}^{2018}a_k\le 2018$且$\sum\limits_{k=1}^{2018}a_k$是 2018 個奇數的總和，

所以$\sum\limits_{k=1}^{2018}a_k$必為偶數，故$\sum\limits_{k=1}^{2018}a_k=0,\pm2,\pm4,\cdots\cdots,\pm2018$，

$\left(\sum\limits_{k=1}^{2018}a_k\right)^2=44^2=1936$與 2018 最接近，會使得$|S|=\left|\dfrac{1936-2018}{2}\right|=41$。

而當$a_1,a_2,\cdots\cdots,a_{2018}$中，有 1031 個 1、987 個$-1$時，即可使$\sum\limits_{k=1}^{2018}a_k=44$。

5-3 如下圖，平面上有一個8×8的方格表。

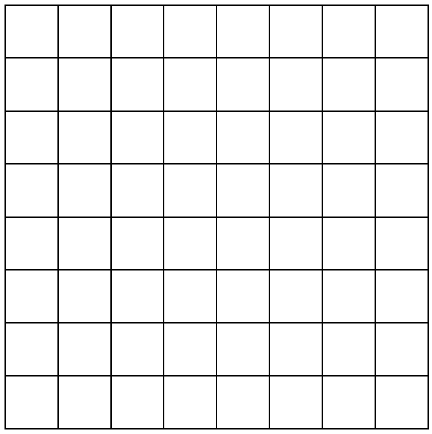
小綠想在此平面上作一條直線，使得這條直線「穿過」最多的方格。

請問小綠作的直線最多可以穿過幾個方格？

並請證明你的答案確實是「最多」的。

註：所謂的「穿過方格」，是指此直線必須通過方格的內部。

如果直線只與方格的邊界或頂點接觸，就不算是穿過方格。



答：15。

解：

一直線「穿過方格」時，在方格內部的部分為一線段，

所以穿過n個方格時會被截出n個線段，與方格表會有$n+1$個交點。

而一直線與8×8的方格表的最外面邊界最多只能有兩個交點，

再加上內部的 7 條水平線與 7 條鉛直線，

此直線至多與方格表的直線至多有 16 個交點，

故一直線最多只能穿過 15 個方格。

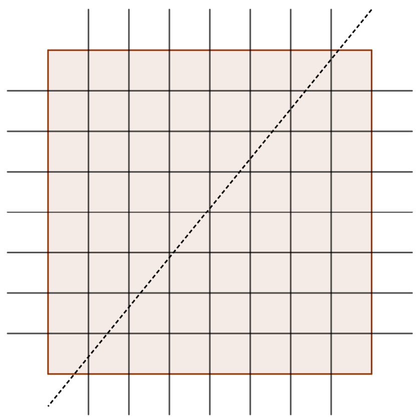
例如：假設方格表的四頂點坐標為$(-4,-4),(4,-4),(4,4),(-4,4)$，

則取直線$y=(1+\frac{\sqrt{2}}{1000})x+\frac{1}{1000}$，則此直線不會通過任何格子點，

且$x=-3,x=-2,\cdots\cdots,x=3$代入後得到的$y$值都在$-4\sim4$之間，

而$y=-4,y=-3,\cdots\cdots,y=4$代入後得到的$x$值都在$-4\sim4$之間，

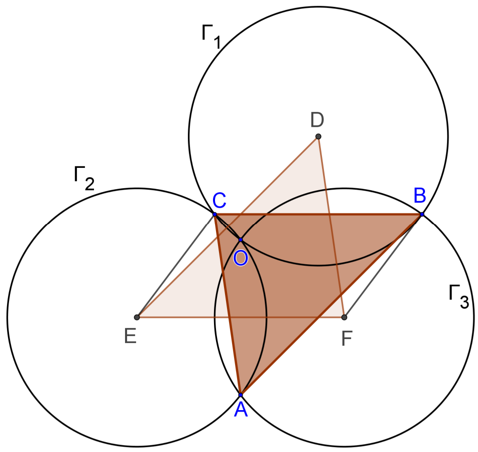
故此直線即滿足上面所述，會通過 15 個方格。



5-4 如下圖，已知平面上有三個半徑均為 r 的圓 $\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3$ 均通過點 O，且 Γ_1,Γ_2 交於 O、C 兩點；Γ_2,Γ_3 交於 O、A 兩點；Γ_3,Γ_1 交於 O、B 兩點。請證明：$\triangle ABC$ 的外接圓半徑長也是 r。

解：

如圖，令 $\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3$ 的圓心分別為 D,E,F。



連接 $\triangle DEF$ 三邊與 $\overline{CE}$ 、 $\overline{BF}$ 。

因為 $\overline{CE}=r=\overline{BF}$ ，

所以只要再證明 $\overline{CE}//\overline{BF}$ ，

即可知四邊形 $CEFB$ 為平行四邊形，

就能證得 $\overline{BC}=\overline{EF}$ 。

以下證明 $\overline{CE}//\overline{BF}$ ：

$$\angle ECB+\angle CBF=\angle ECO+\angle OCB+\angle OBC+\angle OBF$$

（因為 $\overline{EO}=\overline{EC}=\overline{FO}=\overline{FB}=r$ ） $=\dfrac{180^\circ-\angle OEC}{2}+\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{OB}+\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{OC}+\dfrac{180^\circ-\angle OFB}{2}$

$$=\frac{180^\circ-\overset{\frown}{OC}}{2}+\frac{1}{2}\overset{\frown}{OB}+\frac{1}{2}\overset{\frown}{OC}+\frac{180^\circ-\overset{\frown}{OB}}{2}$$

（因為三圓是等圓，所以不同圓上的 $\overset{\frown}{OB}$ 相等，不同圓上的 $\overset{\frown}{OC}$ 也相等，）

$=180^\circ$，故有 $\overline{CE}//\overline{BF}$ 。

於是有 $\overline{BC}=\overline{EF}$ ，同理亦可證得 $\overline{CA}=\overline{FD}$ 、 $\overline{AB}=\overline{DE}$ ，

所以 $\triangle DEF\cong\triangle ABC$（SSS 全等性質）。

又 $\overline{OD}=\overline{OE}=\overline{OF}=r$ ，所以 O 為 $\triangle ABC$ 的外心，且 r 為其外接圓半徑，

故 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑長也是 r，證畢。

5-5 綠園中有 12 位女孩與 30 隻貓要圍坐成一圈，並滿足鄰近的兩位女孩之間，都至少要有 2 隻貓。請問有多少種不同的圍坐方法？（答案無須乘開）

答：$\dfrac{17!\times 30!}{6!}$。

解：

讓 12 位女孩先坐成一圈，共有 $\dfrac{12!}{12}=11!$ 種方法。

接著要決定任意鄰近的兩位女孩之間有多少隻貓，

先將貓視為相同物，任意鄰近的兩位女孩之間先放置兩隻貓，

而剩餘的 6 隻貓再插入女孩之間的 12 處空隙，共有 $H_6^{12}=C_6^{17}=\dfrac{17!}{6!11!}$ 種方法。

最後再將 30 隻貓視為相異物，排入貓的空間，有 $30!$ 種方法。

綜合以上，題目所求的方法數為 $11!\times\dfrac{17!}{6!11!}\times 30!=\dfrac{17!\times 30!}{6!}$ 種方法。

5-6 已知 p,q 為兩質數且滿足 $p \le q$ 。若 $p \mid 7q+1$ 且 $q \mid 7p+1$ ，試求數對 (p,q) 。
答： $(2,3),(2,5),(3,11)$ 。
解：
若 $p=q$ ，則 $p \mid 7p+1 \Rightarrow p \mid 1$ ，不合，所以必有 $p<q$ 。
於是有 $7p+1 \le 7(q-1)+1=7q-6<7q$ ，又 $q \mid 7p+1$ ，
所以 $7p+1=q,2q,3q,4q,5q,6q$ 。

Case 1. 若 $7p+1=q$ ，則 $7q+1=49p+8$ ，又 $p \mid 7q+1$ ，所以 $p \mid 8$ 。
此時 $p=2$ ，但 $q=7p+1=15$ 不合。

Case 2. 若 $7p+1=2q$ ，則 $7q+1=\dfrac{49p+9}{2}$ ，又 $p \mid 2(7q+1)$ ，所以 $p \mid 9$ 。
此時 $p=3$ ，而 $q=\dfrac{7p+1}{2}=11$ 。

Case 3. 若 $7p+1=3q$ ，則 $7q+1=\dfrac{49p+10}{3}$ ，又 $p \mid 3(7q+1)$ ，所以 $p \mid 10$ 。
此時 $p=2$ 或 5， $q=\dfrac{7p+1}{3}=5$ 或 12（不合）。

Case 4. 若 $7p+1=4q$ ，則 $7q+1=\dfrac{49p+11}{4}$ ，又 $p \mid 4(7q+1)$ ，所以 $p \mid 11$ 。
此時 $p=11$ ，而 $q=\dfrac{7p+1}{4}=\dfrac{39}{2}$ 不合。

Case 5. 若 $7p+1=5q$ ，則 $7q+1=\dfrac{49p+12}{5}$ ，又 $p \mid 5(7q+1)$ ，所以 $p \mid 12$ 。
此時 $p=2$ 或 3， $q=\dfrac{7p+1}{5}=3$ 或 $\dfrac{22}{5}$ （不合）。

Case 6. 若 $7p+1=6q$ ，則 $7q+1=\dfrac{49p+13}{6}$ ，又 $p \mid 6(7q+1)$ ，所以 $p \mid 13$ 。
此時 $p=13$ ，而 $q=\dfrac{7p+1}{6}=\dfrac{46}{3}$ 不合。

綜合以上討論，可知滿足題目所述的數對 (p,q) 有 $(2,3),(2,5),(3,11)$ 。