

北一女中 106 學年度下學期《數戰數決》有獎徵答活動

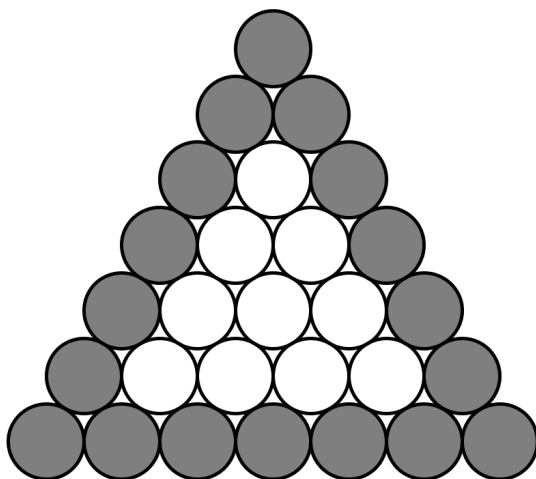
第四期題目：

2018 年 03 月 22 日下午 1 點鐘截止

4-1 已知平面上 $ABCD$ 為一梯形，其中 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ 。若 $(\overline{AD} + \overline{BC})^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2$ ，

請證明： $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ 。

4-2 平面上有 28 個圓如下圖堆疊，其中位於最外圍的圓共有 18 個，即圖中塗色之圓。小綠在每個圓圈內都填入一個數，使得任意三個兩兩相切的圓，其內填寫之數的總和均為 2018。試求 18 個塗色圓內填寫之數的總和。



4-3 對於正整數 m ，我們定義 $S(m) =$ 「 m 的各位數字之和」，

例如 $S(2018) = 2 + 0 + 1 + 8 = 11$ 。

對於連續 n 個正整數 $a+1, a+2, a+3, \dots, a+n$ ，

小綠計算函數值 $S(a+1), S(a+2), S(a+3), \dots, S(a+n)$ 後發現，

其中只有 $S(a+1)$ 與 $S(a+n)$ 是 8 的倍數，試求 n 的最大可能值。

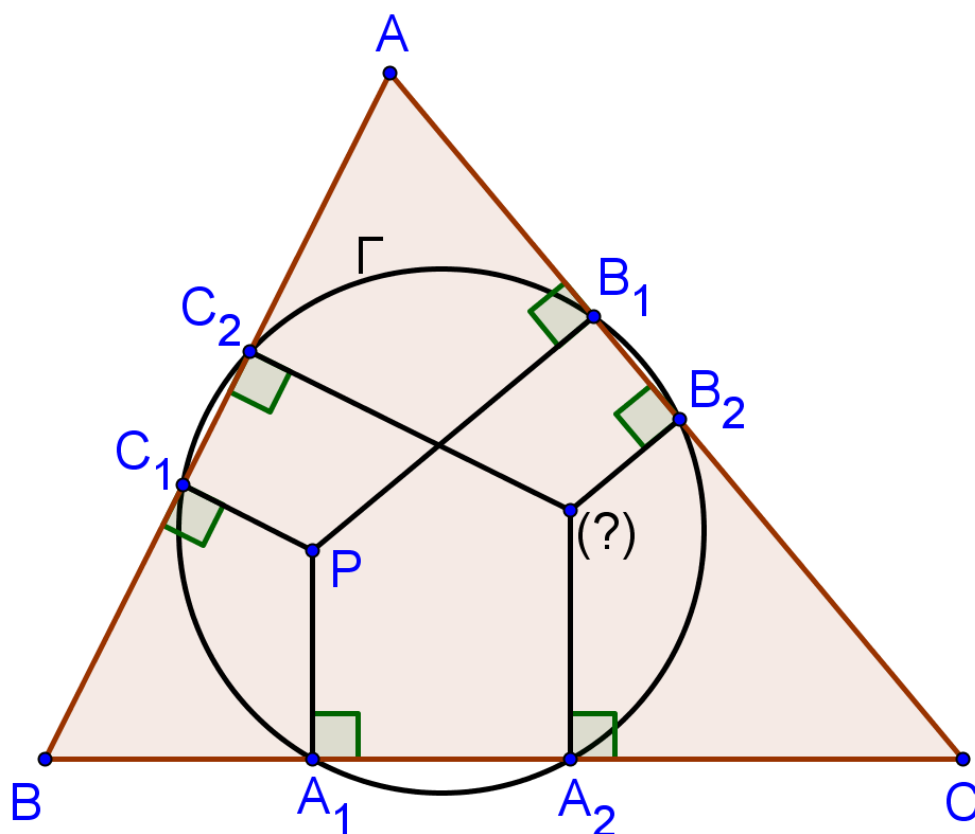
4-4 已知平面上圓 Γ 與 $\triangle ABC$ 的三邊均交於相異兩點。

如下圖，假設圓 Γ 與 \overline{BC} 交於點 A_1, A_2 ；圓 Γ 與 \overline{CA} 交於點 B_1, B_2 ；

圓 Γ 與 \overline{AB} 交於點 C_1, C_2 。

如果分別過 A_1, B_1, C_1 作 $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ 的垂線會共點，

請證明：分別過 A_2, B_2, C_2 作 $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ 的垂線也會共點。



4-5 已知 p, q, r 均為質數且滿足 $\frac{p}{q} - \frac{4}{r+1} = 1$ ，試求三元序對 (p, q, r) 。

4-6 已知正數 a, b 滿足 $a + b = 2$ ，請證明： $1 \leq \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \leq \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ 。

並找出所有滿足 $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ 的數對 (a, b) 。