北一女中 106 學年度下學期《數戰數決》有獎徵答活動

第四期解答：

2018 年 03 月 22 日下午 1 點鐘截止

4-1　已知平面上 $ABCD$ 為一梯形，其中 $\overline{AD} // \overline{BC}$。若 $(\overline{AD}+\overline{BC})^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2$，

請證明：$\overline{AC} \perp \overline{BD}$。

解：

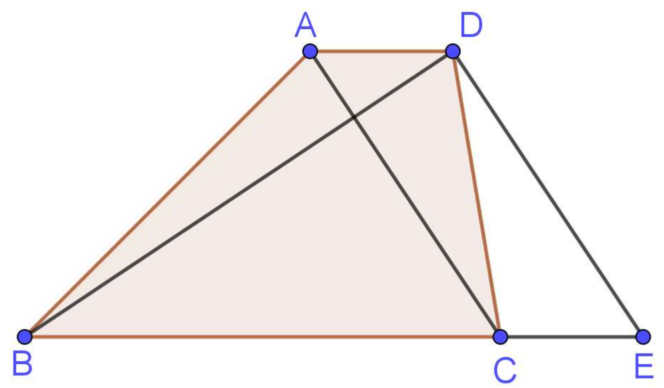
如右圖，延長 $\overline{BC}$ 至點 E

使得 $\overline{CE} = \overline{AD}$。

則 $\overline{CE}$ 與 $\overline{AD}$ 平行且等長，

所以 $ACED$ 為平行四邊形，

故 $\overline{AC} // \overline{DE}$ 且 $\overline{AC} = \overline{DE}$。

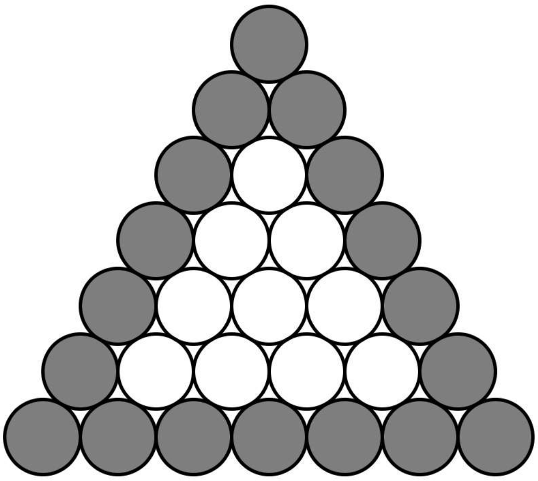


於是 $\overline{BE}^2 = (\overline{CE}+\overline{BC})^2 = (\overline{AD}+\overline{BC})^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{DE}^2 + \overline{BD}^2$，

由畢氏定理的逆定理可知 $\overline{DE} \perp \overline{BD}$。

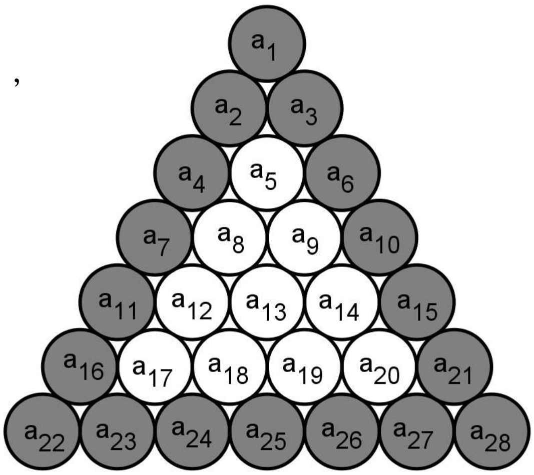
又 $\overline{AC} // \overline{DE}$，所以 $\overline{AC} \perp \overline{BD}$，證畢。

4-2 平面上有 28 個圓如下圖堆疊，其中位於最外圍的圓共有 18 個，即圖中塗色之圓。小綠在每個圓圈內都填入一個數，使得任意三個兩兩相切的圓，其內填寫之數的總和均為 2018。試求 18 個塗色圓內填寫之數的總和。



答：12108。

解：



假設小綠在圓圈內填寫的數依序（由上而下，由左至右）為 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_{28}$，如右圖。

再假設 $a_1 = x$ 、 $a_2 = y$ 、 $a_3 = z$，

則由題意可知 $x + y + z = 2018$。

由題意可知 $a_1 + a_2 + a_3 = a_2 + a_3 + a_5$，

所以必有 $a_1 = a_5 = x$。

同理可得：

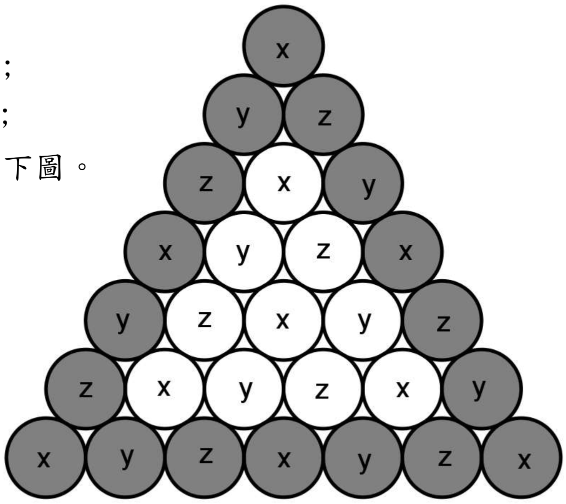
$a_{22} = a_{17} = a_{13} = a_7 = a_5 = a_1 = x$ 、

$a_{25} = a_{17} = x$ 、 $a_{28} = a_{20} = a_{13} = a_{10} = a_5 = x$；

$a_{11} = a_{23} = a_{18} = a_{26} = a_{21} = a_{14} = a_8 = a_6 = a_2 = y$；

$a_{15} = a_{27} = a_{19} = a_{24} = a_{16} = a_{12} = a_4 = a_9 = a_3 = z$；

所以小綠在圓圈內填寫 x, y, z 這三數的分佈如右下圖。



故 18 個塗色圓內填寫之數的總和

$= 6(x + y + z) = 6 \times 2018 = 12108$。

4-3 對於正整數 m，我們定義 $S(m)=$「m 的各位數字之和」，

例如 $S(2018)=2+0+1+8=11$。

對於連續 n 個正整數 $a+1,a+2,a+3,\cdots\cdots,a+n$，

小綠計算函數值 $S(a+1),S(a+2),S(a+3),\cdots\cdots,S(a+n)$ 後發現，

其中只有 $S(a+1)$ 與 $S(a+n)$ 是 8 的倍數，試求 n 的最大可能值。

答：16。

解：

如果 m 的個位數字不是 9，則顯然 $S(m+1)=S(m)+1$。

如果 m 的末 k 位數字都是 9，且倒數第 $k+1$ 位數字不是 9，
則 $m+1$ 的末 k 位數字都是 0，且倒數第 $k+1$ 位數字增加 1，
故 $S(m+1)=S(m)-9k+1$。

若取 $a=9999991$，則 $S(a+1)=S(9999992)=56$ 為 8 的倍數，
$S(a+2)=57,S(a+3)=58,\cdots\cdots,S(a+8)=S(9999999)=63,$
$S(a+9)=S(10000000)=1,S(a+10)=2,\cdots\cdots,S(a+15)=7,S(a+16)=8$，
故此時有 $n=16$。

假設 $n\geq 17$，則 $a+2,a+3,a+4,\cdots\cdots,a+11$ 之中，至少有一數的個位數字為 0。
且 $S(a+2),S(a+3),S(a+4),\cdots\cdots,S(a+16)$ 都不是 8 的倍數。

Case 1. 如果 $a+k$ 的個位數字為 0，其中 $2\leq k\leq 9$，
則 $S(a+k),S(a+k+1),S(a+k+2),\cdots\cdots,S(a+k+7)$ 是連續正整數，
不可能都不是 8 的倍數。

Case 2. 如果 $a+k$ 的個位數字為 0，其中 $10\leq k\leq 11$，
則 $S(a+k-8),S(a+k-7),S(a+k-5),\cdots\cdots,S(a+k-1)$ 是連續正整數，
不可能都不是 8 的倍數。

所以 $n\geq 17$ 不可能發生，故 n 的最大可能值為 16。

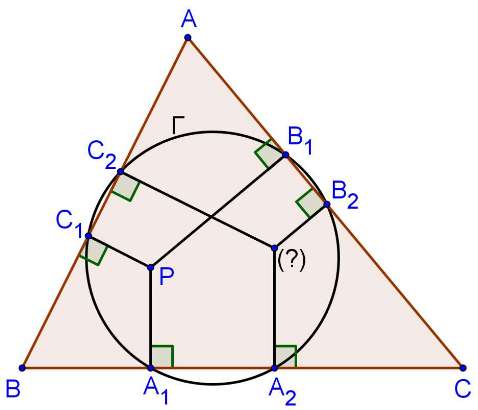
4-4 已知平面上一圓Γ與$\triangle ABC$的三邊均交於相異兩點。

如下圖，假設圓Γ與$\overline{BC}$交於點A_1, A_2；圓Γ與$\overline{CA}$交於點B_1, B_2；

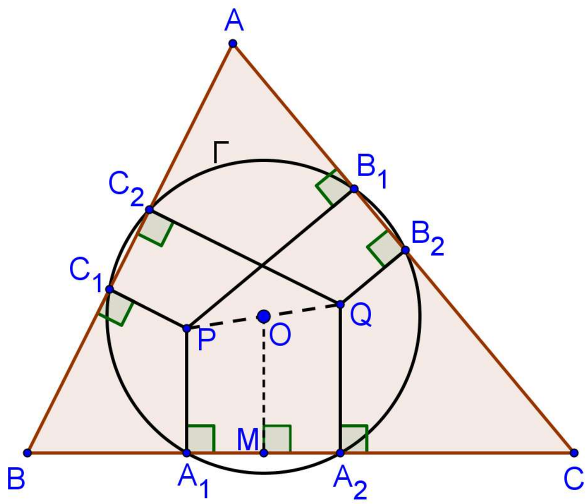
圓Γ與$\overline{AB}$交於點C_1, C_2。

如果分別過A_1, B_1, C_1作$\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$的垂線會共點，

請證明：分別過A_2, B_2, C_2作$\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$的垂線也會共點。



解：



假設圓Γ的圓心為O，

連接$\overline{PO}$並延長$\overline{PO}$至點Q，

使得$\overline{PO} = \overline{OQ}$。

再取$\overline{A_1A_2}$中點M，連接$\overline{OM}$。

則因為O是Γ的圓心，

所以$\overline{OM}$垂直平分$\overline{A_1A_2}$

$\Rightarrow \overline{PA_1} // \overline{OM}$。

因為$\overline{PO} : \overline{OQ} = \overline{A_1M} : \overline{MA_2} = 1:1$且$\overline{PA_1} // \overline{OM}$，

所以$\overline{QA_2} // \overline{OM} // \overline{PA_1}$，故$\overline{QA_2} \perp \overline{BC}$。

同理亦可證得$\overline{QB_2} \perp \overline{CA}$且$\overline{QC_2} \perp \overline{AB}$，

於是過A_2, B_2, C_2作$\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$的垂線就會交於$Q$點，證畢。

4-5 已知 p,q,r 均為質數且滿足 $\frac{p}{q}-\frac{4}{r+1}=1$，試求三元序對 (p,q,r)。

答：$(p,q,r)=(3,2,7),(5,3,5),(7,3,2)$

解：

$\frac{p}{q}-\frac{4}{r+1}=1\Rightarrow\frac{p}{q}=\frac{r+5}{r+1}$。

Case 1.　若 $r+5$ 是 3 的倍數。

則 $r+1$ 不是 3 的倍數，所以分數 $\frac{r+5}{r+1}$ 不論如何約分擴分，分子必為 3 的倍數。

故 $\frac{r+5}{r+1}=\frac{p}{q}$ 的分子 p 必為 3 的倍數。又因為 p 是質數，所以 $p=3$。

於是 $\frac{r+5}{r+1}=\frac{3}{q}\Rightarrow q=3\cdot\frac{r+1}{r+5}<3$，又 q 也是質數，所以 $q=2$，進而可解出 $r=7$。

Case 2.　若 $r+1$ 是 3 的倍數。

則 $r+5$ 不是 3 的倍數，所以分數 $\frac{r+5}{r+1}$ 不論如何約分擴分，分母必為 3 的倍數。

故 $\frac{r+5}{r+1}=\frac{p}{q}$ 的分母 q 必為 3 的倍數。又因為 q 是質數，所以 $q=3$。

於是 $\frac{r+5}{r+1}=\frac{p}{3}\Rightarrow p=3\cdot\frac{r+5}{r+1}=3\cdot(1+\frac{4}{r+1})\leq 3\cdot(1+\frac{4}{2+1})\leq 7$（因為質數 $r\geq 2$）。

又 p 也是質數，所以 $p=2,3,5,7$，

逐一代回 $\frac{r+5}{r+1}=\frac{p}{3}$ 可解出有 $p=5,r=5$ 或 $p=7,r=2$。

Case 3.　若 $r+1$ 與 $r+5$ 都不是 3 的倍數。

則 r 本身必為 3 的倍數。又因為 r 是質數，所以 $r=3$。

故 $\frac{p}{q}=\frac{r+5}{r+1}=2\Rightarrow p=2q$，此與 p 是質數矛盾。

綜合以上所述，可知 $(p,q,r)=(3,2,7),(5,3,5),(7,3,2)$。

4-6 已知正數a,b滿足$a+b=2$，請證明：$1\le\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}\le\frac{1+\sqrt{2}}{2}$。

並找出所有滿足$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$的數對$(a,b)$。

答：$(a,b)=(1+\sqrt{2\sqrt{2}-2},1-\sqrt{2\sqrt{2}-2})$或$(1-\sqrt{2\sqrt{2}-2},1+\sqrt{2\sqrt{2}-2})$。

解：

Part 1. 先證明$1\le\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}$。

因為$a+b=2$，由算幾不等式可得$\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}=1\Rightarrow a^2b^2=(\sqrt{ab})^4\le 1$。

所以$1+a^2+b^2+a^2b^2\le 2+a^2+b^2$

$$\Rightarrow 1\le\frac{2+a^2+b^2}{1+a^2+b^2+a^2b^2}=\frac{(1+b^2)+(1+a^2)}{(1+a^2)(1+b^2)}=\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}$$ 。

Part 2. 再證明$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}\le\frac{1+\sqrt{2}}{2}$。

不妨假設$a=1-x$、$b=1+x$，其中$-1<x<1$。

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}&=\frac{1}{1+(1-x)^2}+\frac{1}{1+(1+x)^2}\\&=\frac{1+(1+x)^2+1+(1-x^2)}{[1+(1-x)^2][1+(1+x)^2]}\\&=\frac{2x^2+4}{(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)}=\frac{2x^2+4}{(x^2+2)^2-(2x)^2}\end{aligned}$$

（令$u=x^2$，則$0\le u<1$）　$=\frac{2(u+2)}{u^2+4}=\frac{2}{(u-2)+\frac{8}{u+2}}=\frac{2}{(u+2)+\frac{8}{u+2}-4}$。

由算幾不等式可得$(u+2)+\frac{8}{u+2}\ge 2\sqrt{(u+2)\cdot\frac{8}{u+2}}=4\sqrt{2}$，

所以$(u+2)+\frac{8}{u+2}-4\ge 4\sqrt{2}-4$，

故$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}=\frac{2}{(u+2)+\frac{8}{u+2}-4}\le\frac{2}{4\sqrt{2}-4}=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$。

等號發生時，$u+2=\frac{8}{u+2}\Rightarrow u+2=2\sqrt{2}\Rightarrow x^2=u=2\sqrt{2}-2\Rightarrow x=\pm\sqrt{2\sqrt{2}-2}$，

故$(a,b)=(1+\sqrt{2\sqrt{2}-2},1-\sqrt{2\sqrt{2}-2})$或$(1-\sqrt{2\sqrt{2}-2},1+\sqrt{2\sqrt{2}-2})$。