北一女中 107 學年度上學期《數戰數決》有獎徵答活動

第三期解答：

3-1 已知正整數 n 使得 $2n+1$ 是完全平方數，但 $2n+2, 2n+3, \cdots\cdots, 3n+2$ 都不是完全平方數。試求出所有滿足條件的 n 值。

答：$n=4$。

解：

因為 $2n+1$ 是奇數，也是完全平方數，故可假設 $2n+1=(2k-1)^2$，其中 $k \in \mathbb{N}$。

因為 $(2k-1)^2$ 的下一個完全平方數是 $(2k)^2$，

且 $2n+2, 2n+3, \cdots\cdots, 3n+2$ 都不是完全平方數，所以 $3n+2<(2k)^2$。

由 $2n+1=(2k-1)^2=4k^2-4k+1 \Rightarrow n=2k^2-2k$，

可得 $3n+2<(2k)^2 \Rightarrow 3(2k^2-2k)+2<(2k)^2$

$$\Rightarrow 6k^2-6k+2<4k^2$$

$$\Rightarrow k^2-3k+1<0$$

$$\Rightarrow (k-\frac{3-\sqrt{5}}{2})(k-\frac{3+\sqrt{5}}{2})<0$$

$$\Rightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2}<k<\frac{3+\sqrt{5}}{2}\text{，}$$

又 $k \in \mathbb{N}$，所以 $k=1$ 或 2。

當 $k=1$ 時，$n=2k^2-2k=0$ 不是正整數，不合。

當 $k=2$ 時，$n=2k^2-2k=4$，此時 $2n+1=9$ 為完全平方數，

而 $2n+2, 2n+3, \cdots\cdots, 3n+2$ 為 $10, 11, \cdots\cdots, 14$ 都不是完全平方數。

故 $n=4$ 為唯一滿足題意的 n 值。

3-2 已知x, y, z為非零實數，且滿足 $yz+\frac{1}{x}=zx+\frac{2}{y}=xy+\frac{7}{z}=\frac{1}{x+y+z}$ ，

試求x, y, z之值。

答：$x=\sqrt[3]{3}, y=\frac{\sqrt[3]{3}}{2}, z=-2\sqrt[3]{3}$ 。

解：

由題目條件 $yz+\frac{1}{x}=zx+\frac{2}{y}=xy+\frac{7}{z}=\frac{1}{x+y+z}$

$\Rightarrow \frac{xyz+1}{x}=\frac{xyz+2}{y}=\frac{xyz+7}{z}=\frac{1}{x+y+z}$ 。

因為$\frac{xyz+1}{x}=\frac{xyz+2}{y}=\frac{xyz+7}{z}$ ，

所以$\frac{xyz+1}{x}=\frac{xyz+2}{y}=\frac{xyz+7}{z}=\frac{(xyz+1)+(xyz+2)+(xyz+7)}{x+y+z}=\frac{3xyz+10}{x+y+z}$ ，

故$\frac{3xyz+10}{x+y+z}=\frac{1}{x+y+z}\Rightarrow 3xyz+10=1\Rightarrow xyz=-3$ 。

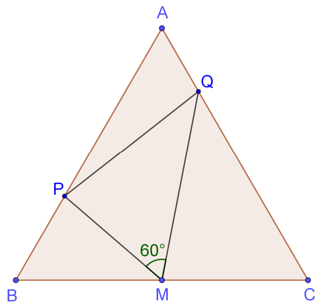
將$xyz=-3$代回$\frac{xyz+1}{x}=\frac{xyz+2}{y}=\frac{xyz+7}{z}$可得$\frac{-2}{x}=\frac{-1}{y}=\frac{4}{z}$ ，

故$x:y:z=(-2):(-1):4$ 。

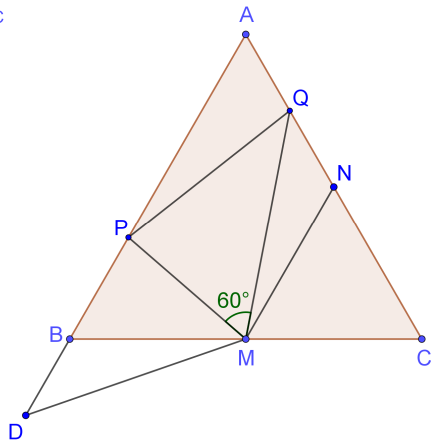
可令$x=-2t, y=-t, z=4t$代入$\frac{xyz+1}{x}=\frac{1}{x+y+z}$可得$\frac{8t^3+1}{-2t}=\frac{1}{t}\Rightarrow t=-\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$ ，

所以$x=\sqrt[3]{3}, y=\frac{\sqrt[3]{3}}{2}, z=-2\sqrt[3]{3}$ 。

3-3　已知$\triangle ABC$為正三角形，M為$\overline{BC}$的中點。點P、點Q分別在$\overline{AB}$、$\overline{AC}$上且滿足$\angle PMQ=60^\circ$，連接$\overline{PQ}$。請證明：$\overline{PQ}=\overline{BP}+\overline{CQ}-\frac{1}{2}\overline{BC}$。



解：



如右圖，令$\overline{AC}$中點為N，連接$\overline{MN}$。

再延長BP至點D，使得$\overline{BD}=\overline{QN}$，連接$\overline{MD}$。

因為$\triangle ABC$為正三角形，

所以$\overline{CN}=\frac{1}{2}\overline{BC}\Rightarrow\overline{QN}=\overline{CQ}-\frac{1}{2}\overline{BC}$。

又$\overline{BD}=\overline{QN}$，所以$\overline{PD}=\overline{BP}+\overline{BD}=\overline{BP}+\overline{CQ}-\frac{1}{2}\overline{BC}$，

故只需再證明$\overline{PD}=\overline{PQ}$即可。

因為M、N分別為$\overline{BC}$、$\overline{AC}$的中點，所以$\overline{MB}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\overline{MN}$，

且$\angle CNM=\angle CAB=60^\circ\Rightarrow\angle MNQ=120^\circ=180^\circ-\angle B=\angle MBD$。

又$\overline{BD}=\overline{QN}$，所以$\triangle MNQ\cong\triangle MBD$（SAS 全等性質），

故$\overline{MQ}=\overline{MD}$，且$\angle NMQ=\angle BMD$。

因為$\angle NMQ=\angle BMD$，所以$\angle PMD=\angle PMB+\angle BMD=\angle PMB+\angle NMQ$

$=180^\circ-\angle PMQ-\angle CMN=180^\circ-60^\circ-60^\circ=60^\circ=\angle PMQ$，

又$\overline{MQ}=\overline{MD}$、$\overline{MP}=\overline{MP}$，所以$\triangle PMD\cong\triangle PMQ$（SAS 全等性質），

故$\overline{PD}=\overline{PQ}$，證畢。

3-4 已知f為三次實係數多項式且其常數項為 3。
若對於所有實數 x，$[x^3-2x+1-f(x)][2x^3-5x^2+4-f(x)]\le 0$ 恆成立，
試求 $f(-1)$ 的所有可能值。

答：$-\dfrac{4}{3}$。

解：

令 $g(x)=x^3-2x+1$、$h(x)=2x^3-5x^2+4$、
$d(x)=h(x)-g(x)=x^3-5x^2+2x+3$。

考慮方程式 $d(x)=0$：
$d(-1)=-1-5-2+3=-5<0$、$d(0)=0-0+0+3=3>0$；
$d(1)=1-5+2+3=1>0$、$d(2)=8-20+4+3=-5<0$；
$d(4)=64-80+8+3=-5<0$、$d(5)=125-125+10+3=13>0$；
由代數基本定理與勘根定理可知 $d(x)=0$ 恰有 3 實根，
其中 1 實根在 -1～0 之間、1 實根在 1～2 之間、1 實根在 4～5 之間。
假設此三實根分別為 α,β,γ，則 $d(x)=x^3-5x^2+2x+3=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$。
因為 $d(\alpha)=0$，所以 $g(\alpha)=h(\alpha)$。

在 $[x^3-2x+1-f(x)][2x^3-5x^2+4-f(x)]\le 0$ 中將 $x=\alpha$ 代入，
可得 $[g(\alpha)-f(\alpha)][h(\alpha)-f(\alpha)]\le 0$，又因為 $g(\alpha)=h(\alpha)$，
所以 $[g(\alpha)-f(\alpha)]^2\le 0 \Rightarrow f(\alpha)=g(\alpha)$，同理亦有 $f(\beta)=g(\beta)$、$f(\gamma)=g(\gamma)$。

因為 $f(\alpha)=g(\alpha)$、$f(\beta)=g(\beta)$、$f(\gamma)=g(\gamma)$，
所以 $d(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\,|\,[f(x)-g(x)]$，
又 f、g、d 都是三次實係數多項式，故可令 $f(x)=k\cdot d(x)+g(x)$，其中 $k\in\mathbb{R}$。

再取 $x=0$ 代入 $f(x)=k\cdot d(x)+g(x)$ 可得 $f(0)=k\cdot d(0)+g(0)$

$$\Rightarrow 3=k\cdot 3+1 \Rightarrow k=\frac{2}{3}，$$

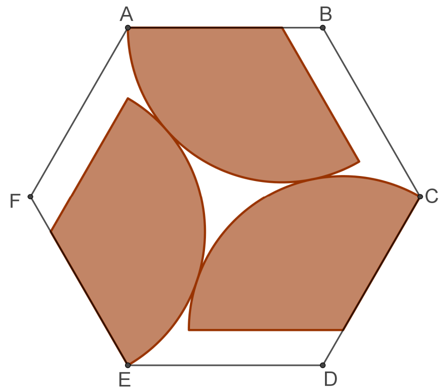
故 $f(x)=\dfrac{2}{3}d(x)+g(x)=\dfrac{2}{3}(x^3-5x^2+2x+3)+(x^3-2x+1)=\dfrac{5}{3}x^3-\dfrac{10}{3}x^2-\dfrac{2}{3}x+3$。

此時 $f(-1)=-\dfrac{5}{3}-\dfrac{10}{3}+\dfrac{2}{3}x+3=-\dfrac{4}{3}$。

【註】$f(x)=\dfrac{5}{3}x^3-\dfrac{10}{3}x^2-\dfrac{2}{3}x+3$ 時，

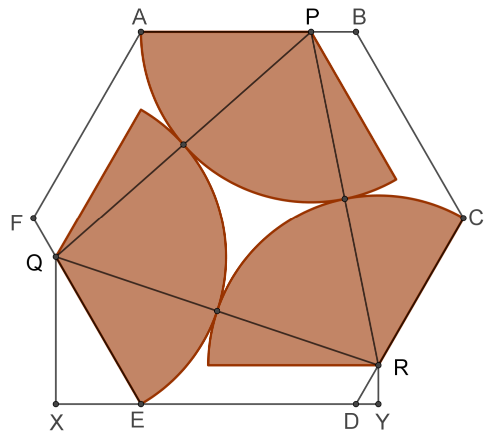
$$[x^3-2x+1-f(x)][2x^3-5x^2+4-f(x)]=-\frac{2}{9}(x^3-5x^2+2x+3)^2\le 0$$ 恆成立。

3-5 如下圖，將一個半徑為 1 的圓分割成 3 個全等的扇形，可以鑲嵌在一個正六邊形 $ABCDEF$ 的內部，而且這 3 個扇形的圓弧恰好兩兩相切。試求正六邊形 $ABCDEF$ 的邊長。



答：$\dfrac{3+\sqrt{21}}{6}$。

解：



令三扇形的圓心分別為 P、Q、R，如右圖。
再分別由 Q、R 對直線 ED 作垂線，
垂足分別為 X、Y。

假設正六邊形 $ABCDEF$ 的邊長為 a。
因為 Q、R 為外切兩扇形的圓心，

所以 $\overline{QR}=2$。

因為 $\overline{QE}=\overline{RC}=1$，所以 $\overline{DR}=a-1$。

又 $\angle QEX=\angle RDY=60°$ 且 $\angle QXE=\angle RYD=90°$，

所以 $\overline{XE}=\dfrac{1}{2}$、$\overline{QX}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$、$\overline{DY}=\dfrac{1}{2}(a-1)$、$\overline{RY}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(a-1)$。

再由畢氏定理可知：$\overline{QR}^2=\overline{XY}^2+(\overline{QX}-\overline{RY})^2$

$$\Rightarrow 2^2=[\frac{1}{2}+a+\frac{1}{2}(a-1)]^2+[\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}(a-1)]^2$$

$$\Rightarrow 3a^2-3a-1=0\Rightarrow a=\frac{3\pm\sqrt{21}}{6}$$ （負不合）。

3-6 小綠有 100 張正方形卡片，每張卡片的邊長都是 1。已知每一張卡片的顏色都是紅色、綠色、藍色這 3 種顏色中的其中一種，而且每一種顏色的卡片都不超過 50 張。

請證明：小綠一定能將這 100 張卡片排成一個10×10的大正方形，使得同顏色的卡片不相鄰。

解：

令紅色、綠色、藍色的卡片分別有R,G,B張，

且可不妨假設$R\geq G\geq B$，則$R+G+B=100$。

因為$100=R+G+B\leq R+R+R=3R$，所以$50\geq R\geq 34$。

又$G+B=100-R\geq 100-50=50\Rightarrow G+G\geq 50\Rightarrow G\geq 25\Rightarrow R+B\leq 75$。

將10×10的方格表編號如下：

	1		3		7		13		21
2		4		8		14		22	
	5		9		15		23		31
6		10		16		24		32	
	11		17		25		33		39
12		18		26		34		40	
	19		27		35		41		45
20		28		36		42		46	
	29		37		43		47		49
30		38		44		48		50	

51		52		55		60		67	
	53		56		61		68		76
54		57		62		69		77	
	58		63		70		78		85
59		64		71		79		86	
	65		72		80		87		92
66		73		81		88		93	
	74		82		89		94		97
75		83		90		95		98	
	84		91		96		99		100

將紅色卡片從 1 號方格的位置開始放入，直到R號方格。

接著將藍色卡片從$R+1$號方格的位置開始放入，直到$R+B$號方格。

最後將綠色卡片放入剩下的方格。

因為$50\geq R\geq 34$，所以紅色卡片所在的 1 號方格到R號方格都不相鄰。

因為$R+1\geq 35$、$R+B\leq 75$，

所以藍色卡片所在的$R+1$號方格到$R+B$號方格都不相鄰。

因為$G\leq 50\Rightarrow R+B+1=101-G\geq 51$，

所以綠色卡片所在的$R+B+1$號方格到 100 號方格都不相鄰。

所以上述的排法可以滿足題目的要求，證畢。