北一女中 107 學年度上學期《數戰數決》有獎徵答活動

第二期題目：

2018 年 11 月 22 日下午 1 點鐘截止

2-1　已知 a,b,c 為實數且滿足 $(a+b+c)c<0$，請證明：$b^2>4ac$。

解：

假設 $f(x)=ax^2+bx+c$，則 $f(0)=c$ 且 $f(1)=a+b+c$，

由題目條件即可知 $f(0)\cdot f(1)<0$，故 $f(0)$、$f(1)$ 必定一正一負，

當 $a\neq 0$ 時：

若 $b^2-4ac\leq 0$，則必有 $f(x)$ 恆非正或恆非負，矛盾。

故必有 $b^2-4ac>0$

當 $a=0$ 時：

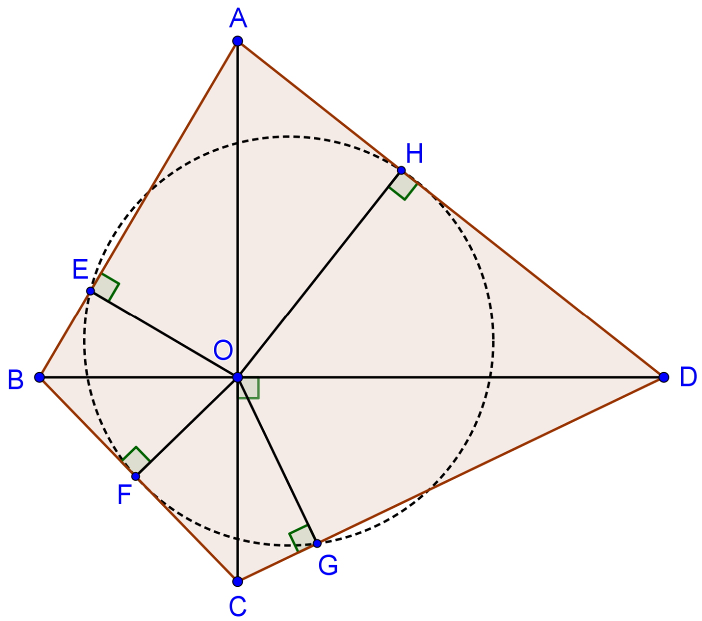
若 $b=0$，則 $(a+b+c)c<0\Rightarrow c^2<0$，矛盾。

故必有 $b\neq 0$，而此時 $b^2>0=4ac$。

綜合以上所述可知必有 $b^2>4ac$。

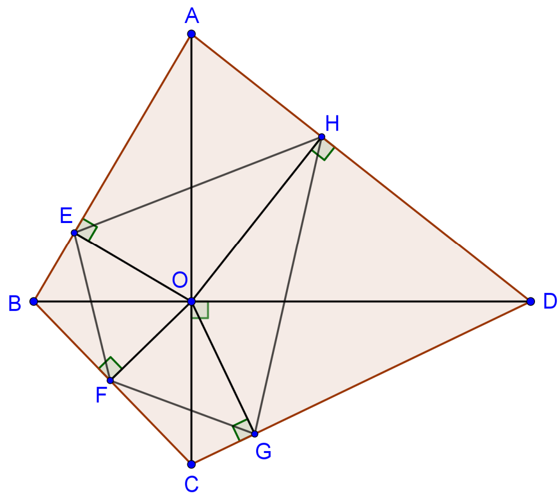
2-2 如下圖，已知四邊形 $ABCD$ 的兩條對角線互相垂直且交於點 O。假設 O 點分別對 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 、 $\overline{DA}$ 作垂線，且垂足分別為 E、F、G、H。

請證明：E、F、G、H 四點共圓。



解：

連接 $\overline{EF}$ 、 $\overline{FG}$ 、 $\overline{GH}$ 、 $\overline{HE}$ 。



因為 $\angle OEA + \angle OHA = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ ，

所以 A、E、O、H 四點共圓，

故 $\angle OEH = \angle OAH$ 。

同理亦可得：

$\angle OEF = \angle OBF$ 、

$\angle OGF = \angle OCF$ 、

$\angle OGH = \angle ODH$ ，

所以

$$\begin{aligned}
\angle HEF + \angle HGF &= (\angle OEH + \angle OEF) + (\angle OGF + \angle OGH) \\
&= (\angle OAH + \angle OBF) + (\angle OCF + \angle ODH) \\
&= (\angle OAH + \angle ODH) + (\angle OCF + \angle OBF) \\
&= (180^\circ - \angle AOD) + (180^\circ - \angle BOC) \\
&= (180^\circ - 90^\circ) + (180^\circ - 90^\circ) = 180^\circ
\end{aligned}$$ ，

故 E、F、G、H 四點共圓，證畢。

2-3　已知 x,y,z 為均為非零實數且滿足 $\begin{cases} x^2+x=y^2 \\ y^2+y=z^2 \\ z^2+z=x^2 \end{cases}$ ，

請證明：$(x-y)(y-z)(z-x)=1$ 。

解：

將 $\begin{cases} x^2+x=y^2 \\ y^2+y=z^2 \\ z^2+z=x^2 \end{cases}$ 的三式相加後，化簡可得 $x+y+z=0$ ，所以 $x+y=-z$ 。

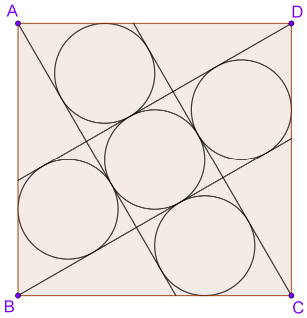
由 $x^2+x=y^2 \Rightarrow x^2-y^2=-x \Rightarrow (x+y)(x-y)=-x$

$$\Rightarrow (-z)(x-y)=-x \Rightarrow x-y=\frac{x}{z}$$ ，

同理可得 $y-z=\frac{y}{x}$ 、 $z-x=\frac{z}{y}$ ，

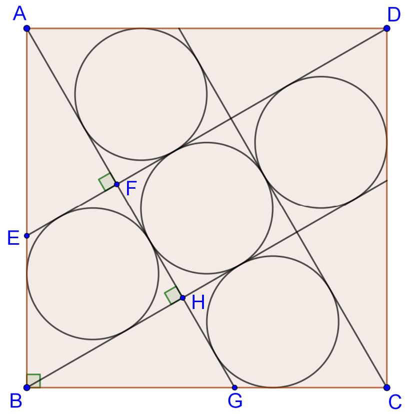
故 $(x-y)(y-z)(z-x)=\frac{x}{z}\cdot\frac{y}{x}\cdot\frac{z}{y}=1$ 。

2-4 如下圖，已知正方形 $ABCD$ 的邊長為 1，圖中的 5 個圓大小相等且均與某四個線段（正方形內部的線段或是正方形的邊）相切。
試求這 5 個圓的半徑長。



答：$\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$。

解：



如圖，由對稱性可假設 $\overline{AE}=\overline{BG}=x$，

則 $\overline{BE}=1-x$ 且 $\overline{AG}=\sqrt{1+x^2}$。

因為 $\angle ABG=\angle AHB=90^\circ$，
由直角三角形子母相似性質可知

$\overline{AH}=\dfrac{\overline{AB}^2}{\overline{AG}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$、$\overline{GH}=\dfrac{\overline{BG}^2}{\overline{AG}}=\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$、$\overline{BH}=\sqrt{\overline{AH}\cdot\overline{GH}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$。

又因為 $\triangle AEF\cong\triangle BGH$，所以 $\overline{AF}=\overline{BH}=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 且 $\overline{EF}=\overline{GH}=\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$，

故 $\overline{FH}=\overline{AH}-\overline{AF}=\dfrac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}$。

因為 $EBHF$ 為圓外切四邊形，

所以 $\overline{EF}+\overline{BH}=\overline{EB}+\overline{FH}\Rightarrow\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=(1-x)+\dfrac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}$，

於是 $\dfrac{x^2+2x-1}{\sqrt{1+x^2}}=1-x\Rightarrow(x^2+2x-1)^2=(1+x^2)(1-x)^2$

$\Rightarrow x^4+4x^3+2x^2-4x+1=x^4-2x^3+2x^2-2x+1$

$\Rightarrow 6x^3-2x=0\Rightarrow 2x(3x^2-1)=0$，又因為 $x>0$，故 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$。

而題目所求之半徑長 $=\dfrac{1}{2}\overline{FH}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{1+\frac{1}{3}}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$。

2-5　試求方程式$\left[\dfrac{20}{x+18}\right]+\left[\dfrac{x+18}{20}\right]=1$的解，其中$[a]$表示不超過$a$的最大整數。

答：$-8<x<22$且$x\neq 2$

解：

令$y=\dfrac{x+18}{20}$，則原方程式可化為$\left[\dfrac{1}{y}\right]+[y]=1$。

顯然$y\neq 0$，否則方程式中的$\dfrac{20}{x+18}$無意義。

若$y<0$，則$\dfrac{1}{y}<0\Rightarrow\left[\dfrac{1}{y}\right]\leq -1$且$[y]\leq -1$，

此時$1=\left[\dfrac{1}{y}\right]+[y]\leq(-1)+(-1)=-2$，矛盾。

若$0<y<1$，則$[y]=0$，此時$\left[\dfrac{1}{y}\right]=1\Leftrightarrow 1\leq\dfrac{1}{y}<2\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}<y\leq 1$，

由$0<y<1$與$\dfrac{1}{2}<y\leq 1$可得$\dfrac{1}{2}<y<1$。

若$y=1$，則$\left[\dfrac{1}{y}\right]+[y]=1+1=2$，與原方程式不合。

若$y>1$，則$0<\dfrac{1}{y}<1\Rightarrow\left[\dfrac{1}{y}\right]=0$，此時$[y]=1\Leftrightarrow 1\leq y<2$，

由$y>1$與$1\leq y<2$可得$1<y<2$。

綜合以上可知符合方程式的y為「$\dfrac{1}{2}<y<2$且$y\neq 1$」。

所以$\dfrac{1}{2}<\dfrac{x+18}{20}<2$且$\dfrac{x+18}{20}\neq 1$

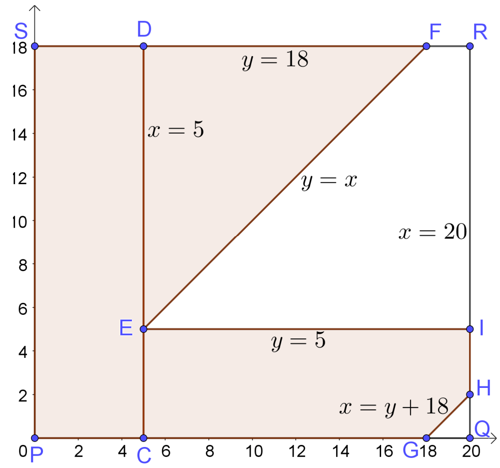
$\Leftrightarrow 10<x+18<40$且$x+18\neq 20$，

$\Leftrightarrow -8<x<22$且$x\neq 2$。

2-6 小綠傍晚放學後要從綠園站坐公車回家，而他有 A 與 B 兩條路線的公車可以搭乘。如果這兩條路線的公車在早上首班車抵達綠園站的時間都是隨機的，之後 A 路線公車固定每 20 分鐘來一班、B 路線公車固定每 18 分鐘來一班。但因為小綠比較喜歡坐 A 路線公車，所以他在等車的前 5 分鐘，遇到 B 路線公車就不搭乘，遇到 A 路線公車才搭乘；但等車時間超過了 5 分鐘後，只要有 A 或 B 路線的公車來，他就會立刻搭乘。（若 A、B 路線公車同時來，則小綠會搭乘 A 路線公車。）

請問：小綠搭乘上 A 路線公車的機率為何？

答：$\dfrac{11}{16}$。



解：

我們假設小綠開始等車後，

第一班會來的 A 路線公車是在 x 分鐘後，

第一班會來的 B 路線公車是在 y 分鐘後，

則 $0 \le x < 20$ 且 $0 \le y < 18$。

故所有數對 (x, y) 的可能就分布在右圖的矩形 $PQRS$ 中，其面積為 360。

首先，如果 $x \le 5$，表示 5 分鐘內小綠就會等到 A 路線公車，小綠必定搭乘之，所以圖中矩形 $PCDS$ 內的任一點都會讓小綠搭乘 A 路線公車，其面積為 90。

又，當 $x > 5$ 但 $x \le y$ 時，表示小綠等車 5 分鐘後，A 路線公車先到站，所以小綠也必定搭乘 A 路線公車，

故圖中 $\triangle DEF$ 內的任一點都會讓小綠搭乘 A 路線公車，其面積為 $\dfrac{13 \times 13}{2} = \dfrac{169}{2}$。

當 $x > 5$ 且 $y \le 5$ 時，表示小綠會跳過第一班 B 路線公車不搭乘，

所以若 $x \le y + 18$，小綠會搭乘 A 路線公車（對應到五邊形 $ECGHI$），

若 $x > y + 18$，小綠會搭乘 B 路線公車（對應到 $\triangle GHQ$），

故五邊形 $ECGHI$ 內的任一點都會讓小綠搭乘 A 路線公車，

其面積為矩形 $CEIQ$ 面積 $-\triangle GHQ$ 面積 $= 5 \times 15 - \dfrac{2 \times 2}{2} = 73$。

而當 $x, y > 5$ 且 $y < x$ 時，小綠就會選擇搭乘 B 路線公車，

所以圖中梯形 $FEIR$ 內的任一點都會讓小綠搭乘 B 路線公車。

綜合以上所述，可知題目所求知機率為 $\dfrac{90 + \dfrac{169}{2} + 73}{360} = \dfrac{11}{16}$。