

北一女中 107 學年度上學期《數戰數決》有獎徵答活動

第一期題目：

2018 年 10 月 04 日下午 1 點鐘截止

1-1 已知 a, b 都是正奇數。

若 $(a^b \cdot b^a)$ 是完全平方數，請證明： ab 也是完全平方數。

1-2 小綠將 100 個玻璃杯排成 10×10 的陣列。

他對於其中 a 個橫列的玻璃杯都倒進半杯容量的黃色液體，剩下的玻璃杯都倒進半杯容量藍色液體。(所以 100 個杯子都半滿了)

接著再對於其中 b 個直行的玻璃杯倒進半杯容量黃色液體，剩下的玻璃杯都倒進藍色液體。(此時 100 個玻璃杯都全滿了)

如果某個玻璃杯被倒入半杯的黃色液體與半杯的藍色液體，則會得到整杯的綠色液體。如果兩次倒入的都是黃色液體，或都是藍色液體，則顏色不變。請問：(1) 如果小綠最後得到 50 杯綠色液體，則 a, b 之值為何？

(2) 小綠最後有可能得到 25 杯綠色液體嗎？

【數戰數決】徵答活動新增「臉書粉絲專頁」!!!
請進入臉書搜尋「北一女中數學徵答：數戰數決」，
或鍵入連結 <https://www.facebook.com/TFGMathPrizedQuiz>，
或掃描右方 QR code，都可以進入粉專喔~~~



裡面有歷屆的徵答試題，歡迎大家上去討論；
有即時訊息（例如題目勘誤或修正）也會在上面公布。

但請務必記得，每一期的徵答題在截止日期前

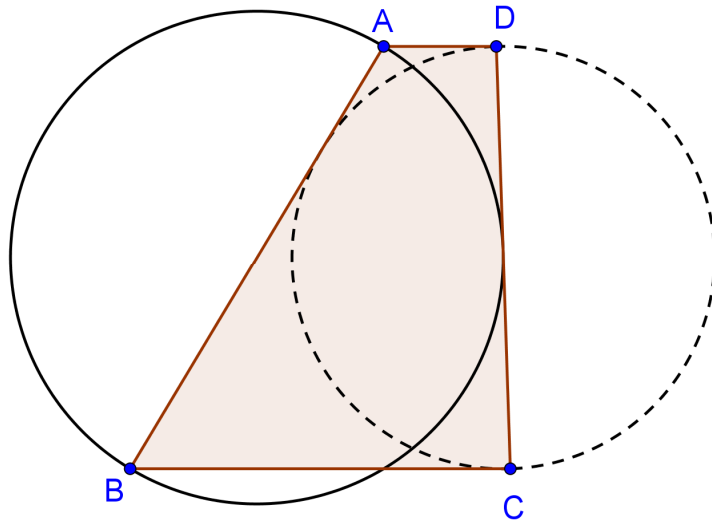
都不能在粉絲頁上討論喔！

【數戰數決】網站：https://web.fg.tp.edu.tw/~math/blog/?page_id=681



1-3 已知正整數 n 可以分成兩個正整數 a, b 之和，且 a, b 都是 $n+6$ 的因數。
試求所有可能的 n 值。

1-4 已知平面上 $ABCD$ 為梯形，其中 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ 。若以 \overline{AB} 為直徑的圓與直線 CD 相切，請證明：以 \overline{CD} 為直徑的圓必與直線 AB 相切。



1-5 有 205 個點排成 5×41 的陣列，小綠 將每一個點都染成綠、黃、藍、紅的其中一種顏色。
請證明：小綠 一定可以找到其中 4 個同顏色的點恰好是一個矩形的四頂點。

1-6 已知實數 a, b 滿足： $a-b, a^2-b^2, a^3-b^3$ 都是質數，
請證明：必有 $a-b=3$ 。

(例如： $a = \frac{7}{3}, b = -\frac{2}{3}$ 時， $a-b=3, a^2-b^2=5, a^3-b^3=13$ 均為質數。)