北一女中 107 學年度上學期《數戰數決》有獎徵答活動

第一期解答：

1-1　已知a,b都是正奇數。

若$(a^b \cdot b^a)$是完全平方數，請證明：ab也是完全平方數。

解：

由對稱性，不妨假設$a \ge b$。

因為a,b都是正奇數，所以$a-b$為偶數，故b^{a-b}為完全平方數。

又$a^b \cdot b^a = (ab)^b \cdot b^{a-b}$，所以$(ab)^b$也是完全平方數。

而b是奇數，所以必有ab也是完全平方數，證畢。

1-2　小綠將 100 個玻璃杯排成10×10的陣列。

他對於其中a個橫列的玻璃杯都倒進半杯容量的黃色液體,剩下的玻璃杯都倒進半杯容量藍色液體。(所以 100 個杯子都半滿了)

接著再對於其中b個直行的玻璃杯倒進半杯容量黃色液體,剩下的玻璃杯都倒進藍色液體。(此時 100 個玻璃杯都全滿了)

如果某個玻璃杯被倒入半杯的黃色液體與半杯的藍色液體,則會得到整杯的綠色液體。如果兩次倒入的都是黃色液體，或都是藍色液體，則顏色不變。

請問：(1) 如果小綠最後得到 50 杯綠色液體，則a,b之值為何？

(2) 小綠最後有可能得到 25 杯綠色液體嗎？

答：(1) $(a,b)=(5,n)$ 或 $(n,5)$，其中$0 \le n \le 10$。(2) 不可能。

解：

由題意可知最後整杯是黃色、藍色、綠色液體的分別有ab杯、$(10-a)(10-b)$杯、$a(10-b)+b(10-a)$杯。

(1)　綠色液體有 50 杯，表示$a(10-b)+b(10-a)=50$，

化簡後可得$ab-5a-5b+25=0 \Rightarrow (a-5)(b-5)=0$，

故$a=5$或$b=5$。

而$a=5$時，必有$a(10-b)+b(10-a)=50$。

$b=5$時，也必有$a(10-b)+b(10-a)=50$。

(2)　綠色液體有 25 杯，表示$a(10-b)+b(10-a)=25$，

化簡後可得$2(ab-5a-5b)+25=0$，

但左式為奇數，右式為偶數，矛盾。

所以小綠最後不可能恰好得到 25 杯綠色液體。

1-3　已知正整數 n 可以分成兩個正整數 a,b 之和，且 a,b 都是 $n+6$ 的因數。試求所有可能的 n 值。

答：$n=2,4,6,8,10,12,14,18,30$

解：

不妨假設 $a\ge b$，

則 $a\,|\,(n+6)\Rightarrow a\,|\,(a+b+6)\Rightarrow a\,|\,(b+6)$（★），

所以 $a\le b+6$，故 $b\le a\le b+6$。

若 $a=b$，則由（★）可知 $b\,|\,(b+6)\Rightarrow b\,|\,6\Rightarrow b=1,2,3,6$，
此時 $a=b=1,2,3,6$，進而求得 $n=a+b=2,4,6,12$，
可一一驗證得知均符合 a,b 都是 $n+6$ 的因數。

若 $a=b+1$，則由（★）可知 $(b+1)\,|\,(b+6)\Rightarrow(b+1)\,|\,5\Rightarrow b+1=5\Rightarrow b=4$，
此時 $a=b+1=5$，進而求得 $n=a+b=9$，
但 $n+6=15$，而 $b=4$ 非其因數，不合。

若 $a=b+2$，則由（★）可知 $(b+2)\,|\,(b+6)\Rightarrow(b+2)\,|\,4\Rightarrow b+2=4\Rightarrow b=2$，
此時 $a=b+2=4$，進而求得 $n=a+b=6$，
而 $n+6=12$，可驗證得知符合 a,b 都是 $n+6$ 的因數。

若 $a=b+3$，則由（★）可知 $(b+3)\,|\,(b+6)\Rightarrow(b+3)\,|\,3$，
但 $b+3$ 比 3 大，不可能有 $(b+3)\,|\,3$，故不合。

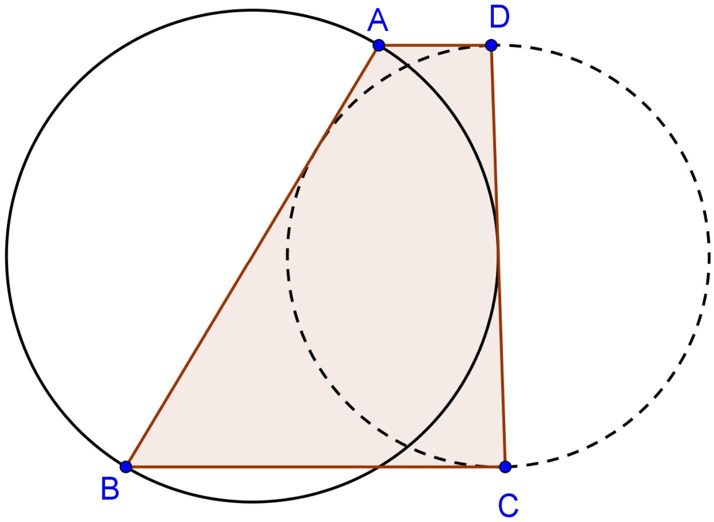
若 $a=b+4$，則由（★）可知 $(b+4)\,|\,(b+6)\Rightarrow(b+4)\,|\,2$，
但 $b+4$ 比 2 大，不可能有 $(b+4)\,|\,2$，故不合。

若 $a=b+5$，則由（★）可知 $(b+5)\,|\,(b+6)\Rightarrow(b+5)\,|\,1$，
但 $b+5$ 比 1 大，不可能有 $(b+5)\,|\,1$，故不合。

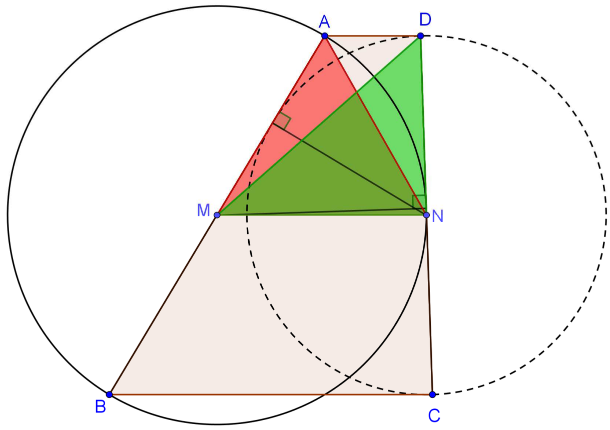
若 $a=b+6$，則 $n+6=a+b+6=2b+12$，
所以 $b\,|\,(n+6)\Rightarrow b\,|\,(2b+12)\Rightarrow b\,|\,12\Rightarrow b=1,2,3,4,6,12$，
此時 $a=b+6=7,8,9,10,12,18$，進而求得 $n=a+b=8,10,12,14,18,30$，
可一一驗證得知均符合 a,b 都是 $n+6$ 的因數。

綜合以上可知，符合題意的 n 值有 $2,4,6,8,10,12,14,18,30$。

1-4　已知平面上 $ABCD$ 為梯形，其中 $\overline{AD}//\overline{BC}$。若以 $\overline{AB}$ 為直徑的圓與直線 CD 相切，請證明：以 $\overline{CD}$ 為直徑的圓必與直線 AB 相切。



解：



分別取 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 中點 M、N，連接 $\overline{MN}$。

因為 $\overline{AD}//\overline{BC}$，所以 $\overline{MN}//\overline{AD}//\overline{BC}$，

故 $\triangle AMN$ 的面積 $=\triangle DMN$ 的面積。

假設 $\overline{AB}=2r_1$、$\overline{CD}=2r_2$，

則 $\overline{AM}=r_1$、$\overline{DN}=r_2$。

因為以 $\overline{AB}$ 為直徑的圓與直線 CD 相切，可知 M 到 $\overline{CD}$ 的距離為 r_1，

所以考慮 $\triangle DMN$ 的面積時，若以 $\overline{DN}=r_2$ 為底，則高為 r_1。

因為 $\triangle AMN$ 的面積 $=\triangle DMN$ 的面積，

所以考慮 $\triangle AMN$ 的面積時，若以 $\overline{AM}=r_1$ 為底，則高必為 r_2，

這就表示 N 到 $\overline{AB}$ 的距離為 r_2，故以 $\overline{CD}$ 為直徑的圓與直線 AB 相切，證畢。

1-5 有 205 個點排成5×41的陣列，小綠將每一個點都染成綠、黃、藍、紅的其中一種顏色。

請證明：小綠一定可以找到其中 4 個同顏色的點恰好是一個矩形的四頂點。

解：

假設陣列是 5 橫列 41 直行。

對於每一直行的 5 個點，因為只有 4 種顏色可染，

所以由鴿籠原理可知必有 2 個點是同色的。

假設第 j 行的 5 個點中，第 a_j 與第 b_j 個點是同色的，其中 $a_j < b_j$，

則 $(a_j,b_j)=(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,5)$，

每個 (a_j,b_j) 都有 10 種可能。

再由鴿籠原理可知 $(a_1,b_1),(a_2,b_2),\cdots\cdots,(a_{41},b_{41})$ 中，

必有其中 5 個 (a_j,b_j) 是完全相同的。

這 5 組 (a_j,b_j) 所對應的同色點中，因為只染上 4 種顏色之一，

所以由鴿籠原理可知必有 2 組是同色的，

則此 2 組同色點（共有 4 個點）都同色，

而且恰好就是一個矩形的四頂點，證畢。

1-6 已知實數a,b滿足：$a-b,a^2-b^2,a^3-b^3$都是質數，

請證明：必有$a-b=3$。

（例如：$a=\frac{7}{3},b=-\frac{2}{3}$時，$a-b=3,a^2-b^2=5,a^3-b^3=13$均為質數。）

解：

假設$a-b=p$、$a^2-b^2=q$、$a^3-b^3=r$，則p,q,r均為質數。

因為$a+b=\frac{a^2-b^2}{a-b}=\frac{q}{p}$，所以$a=\frac{\frac{q}{p}+p}{2}=\frac{q+p^2}{2p}$、$b=\frac{\frac{q}{p}-p}{2}=\frac{q-p^2}{2p}$，

進而可得$ab=\frac{(q+p^2)(q-p^2)}{4p^2}=\frac{q^2-p^4}{4p^2}$，

故$r=a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)=p^3+3\cdot\frac{q^2-p^4}{4p^2}\cdot p=\frac{3q^2+p^4}{4p}$，

整理後可得$3q^2+p^4=4pr$（★）。

因為$3q^2=4pr-p^4=p(4r-p^3)$，所以$p\,|\,3q^2$。

又p,q均為質數，所以$p=3$或$p=q$。

假設$p=q$，代入（★）可得$3p^2+p^4=4pr\Rightarrow 4r=3p+p^3=p(p^2+3)$，

故有$p\,|\,4r$，又p,r均為質數，所以$p=2$或$p=r$。

若$p=2$，則$4r=p(p^2+3)=14\Rightarrow r=\frac{7}{2}$，不合。

若$p=r$，則$4r=p(p^2+3)=r(r^2+3)\Rightarrow r^2+3=4\Rightarrow r=1$，不合。

於是不可能有$p=q$，故$p=3$，即$a-b=3$，證畢。

【註】將$p=3$代入上述過程中可得：只要質數q使得$r=\frac{q^2+27}{4}$也是質數，

則$a=\frac{q+9}{6}$、$b=\frac{q-9}{6}$均為滿足題意的實數a,b。

例如：$(p,q,r,a,b)=(3,7,19,\frac{8}{3},-\frac{1}{3})$、$(3,11,37,\frac{10}{3},\frac{1}{3})$、$(3,17,79,\frac{13}{3},\frac{4}{3})$等。