北一女中 105 學年度下學期《數戰數決》有獎徵答活動

第六期解答：

6-1　已知 a,b,c 為非零實數，並且滿足：$\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$ 成等差數列、$3a,4b,5c$ 成等比數列。請求出 $\frac{a}{c}+\frac{c}{a}$ 之值。

答：$\frac{34}{15}$。

解：

因為 $\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$ 成等差數列，所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b} \Rightarrow bc+ab=2ac \Rightarrow b=\frac{2ac}{a+c}$。

因為 $3a,4b,5c$ 成等比數列，所以 $(4b)^2=3a\cdot 5c \Rightarrow 16b^2=15ac$。

將 $b=\frac{2ac}{a+c}$ 代入 $16b^2=15ac$ 可得 $\frac{64a^2c^2}{(a+c)^2}=15ac \Rightarrow 64ac=15(a+c)^2$，

展開整理後得到 $15a^2-34ac+15c^2=0$

$\Rightarrow (3a-5c)(5a-3c)=0 \Rightarrow \frac{a}{c}=\frac{5}{3}$ 或 $\frac{3}{5}$，故 $\frac{a}{c}+\frac{c}{a}=\frac{5}{3}+\frac{3}{5}=\frac{34}{15}$。

【或由 $15a^2-34ac+15c^2=0$ 亦可得 $15\cdot\frac{a}{c}-34+15\cdot\frac{c}{a}=0 \Rightarrow \frac{a}{c}+\frac{c}{a}=\frac{34}{15}$。】

6-2 黑板上有 2017 個 5 次多項式，這些多項式的每一項係數都是非負實數，且領導係數都是 1。現在小綠可以將黑板上的多項式「修改」:

每次「修改」，小綠都可以任意挑選兩個黑板上的多項式 $f_0(x), g_0(x)$ 擦掉，並且補寫上另外兩個多項式 $f_1(x), g_1(x)$，使得「$f_0(x)+g_0(x)=f_1(x)+g_1(x)$」或「$f_0(x)\cdot g_0(x)=f_1(x)\cdot g_1(x)$」之一成立，且 $f_1(x), g_1(x)$ 仍是領導係數均為 1 的 5 次多項式。

請證明：不論小綠「修改」了多少次以及如何「修改」，都不可能讓黑板上的每個多項式 $f(x)$ 滿足 $f(x)=0$ 的根都是正實數。

解：

如果黑板上有某個 $f(x)$ 使得 $f(x)=0$ 有一根為 α，則我們稱 α 是黑板上的一個「零根」，所以黑板共有 10085 個「零根」(可能有重根)。

對於原本每個黑板上的 5 次多項式 $f(x)$，因為每一項係數都是非負實數，所以由根與係數的關係可知 $f(x)=0$ 的 5 個根的和為負數。
故黑板的 10085 個「零根」的總和也是負數。

但對於小綠的每次「修改」，由根與係數的關係可知：

(1) 若滿足「$f_0(x)+g_0(x)=f_1(x)+g_1(x)$」，則「$f_0(x)=0=g_0(x)$ 共 10 個根的總和」，與「$f_1(x)=0=g_1(x)$ 共 10 個根的總和」必定是相等的，
所以黑板的 10085 個「零根」的總和不變。

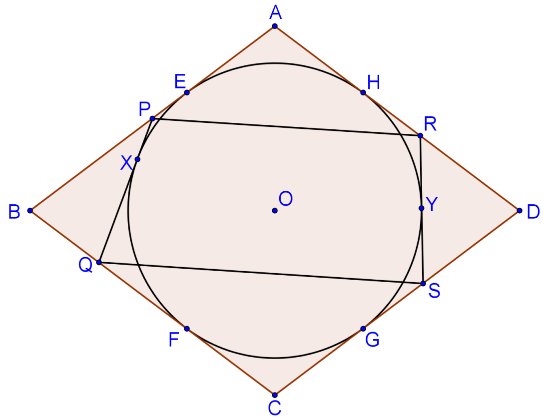
(2) 若滿足「$f_0(x)\cdot g_0(x)=f_1(x)\cdot g_1(x)$」，則「$f_0(x)=0=g_0(x)$ 共 10 個根的總和」，與「$f_1(x)=0=g_1(x)$ 共 10 個根的總和」也必定是相等的，
所以黑板的 10085 個「零根」的總和不變。

假設小綠「修改」了 n 次之後，黑板上的 2017 個 5 次多項式 $f(x)$ 都滿足 $f(x)=0$ 的 5 根都是正實數，則此時黑板的 10085 個「零根」的總和是正數，但這與前述的『黑板的 10085 個「零根」的總和不變』矛盾。

故不論小綠「修改」了多少次以及如何「修改」，都不可能讓黑板上的每個多項式 $f(x)$ 滿足 $f(x)=0$ 的根都是正實數。

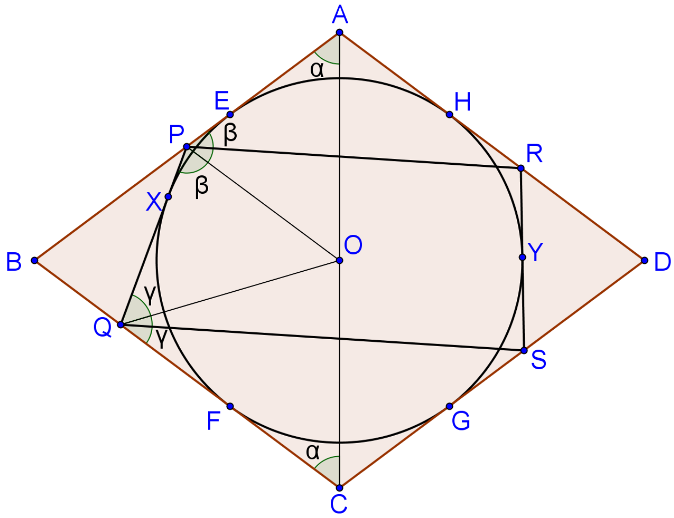
6-3 如下圖，已知 $ABCD$ 為菱形，且其內切圓 O 與四邊 $\overline{AB},\overline{BC},\overline{CD},\overline{DA}$ 切於點 E,F,G,H。過 $\overset{\frown}{EF}$ 上一點 X 作圓 O 之切線分別交 $\overline{AB},\overline{BC}$ 於點 P,Q；過 $\overset{\frown}{GH}$ 上一點 Y 作圓 O 之切線分別交 $\overline{CD},\overline{DA}$ 於點 S,R，連接 $\overline{PR},\overline{QS}$。

請證明：$\overline{PR}//\overline{QS}$。



解：

如右圖，連接 $\overline{AC},\overline{OP},\overline{OQ}$。



因為 $\overline{BA}=\overline{BC}$，

所以可假設 $\angle BAC=\angle BCA=\alpha$。

因為 $\overline{PE}$ 、$\overline{PX}$ 均與圓 O 相切，

所以可假設 $\angle OPA=\angle OPQ=\beta$。

因為 $\overline{QX}$ 、$\overline{QF}$ 均與圓 O 相切，

所以可假設 $\angle OQP=\angle OQC=\gamma$。

於是四邊形 $APQC$ 的內角和 $=2\alpha+2\beta+2\gamma=360° \Rightarrow \alpha+\beta+\gamma=180°$，

故 $\angle AOP=\gamma$、$\angle POQ=\alpha$、$\angle QOC=\beta$。

由此可知$\triangle APO\sim\triangle COQ$，則 $\overline{AP}:\overline{AO}=\overline{CO}:\overline{CQ}\Rightarrow\overline{AP}\cdot\overline{CQ}=\overline{AO}\cdot\overline{CO}$。

同理可證明 $\overline{AR}\cdot\overline{CS}=\overline{AO}\cdot\overline{CO}$，

故我們有 $\overline{AP}\cdot\overline{CQ}=\overline{AR}\cdot\overline{CS}\Rightarrow\overline{AP}:\overline{AR}=\overline{CS}:\overline{CQ}$。

又 $\angle BAD=\angle BCD$，所以$\triangle APR\sim\triangle CSQ\Rightarrow\angle APR=\angle CSQ$。

而從 $\angle APR=\angle CSQ$ 以及 $\overline{AP}//\overline{CS}$，我們即可得到 $\overline{PR}//\overline{QS}$，證畢。

6-4　已知實數數列$a_0,a_1,a_2,\cdots\cdots$是無窮多項的等差數列。

請證明：對於任意$n\in\mathbb{N}$，$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kC_k^n x^k(1-x)^{n-k}$都是$x$的一次多項式。

解：

假設實數數列$a_0,a_1,a_2,\cdots\cdots$的首項$a_0=a$、公差為d，則$a_k=a+kd$。

$$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kC_k^n x^k(1-x)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}(a+kd)C_k^n x^k(1-x)^{n-k}$$
$$=a\sum_{k=0}^{n}C_k^n x^k(1-x)^{n-k}+d\sum_{k=0}^{n}kC_k^n x^k(1-x)^{n-k}\text{。}$$

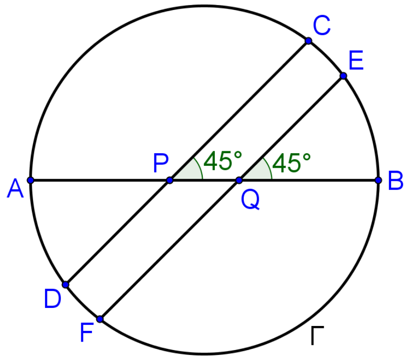
由二項式定理可得$\sum_{k=0}^{n}C_k^n x^k(1-x)^{n-k}=[x+(1-x)]^n=1^n=1$。

而
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}kC_k^n x^k(1-x)^{n-k}&=\sum_{k=1}^{n}kC_k^n x^k(1-x)^{n-k}\\&=\sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot x^k(1-x)^{n-k}\\&=\sum_{k=1}^{n}n\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\cdot x^k(1-x)^{n-k}\\&=nx\sum_{k=1}^{n}C_{k-1}^{n-1}\cdot x^{k-1}(1-x)^{n-k}\\&=nx[x+(1-x)]^{n-1}=nx\text{。}\end{aligned}$$

$$f_n(x)=a\sum_{k=0}^{n}C_k^n x^k(1-x)^{n-k}+d\sum_{k=0}^{n}kC_k^n x^k(1-x)^{n-k}$$
$=a\cdot1+d\cdot nx=a+dnx$為一次多項式，證畢。

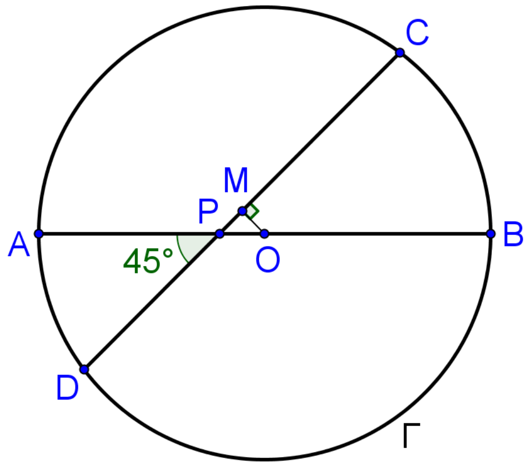
6-5 如下圖，已知圓 Γ 的半徑為 1。圓 Γ 內有兩平行弦 $\overline{CD}$、$\overline{EF}$ 分別與直徑 $\overline{AB}$ 交於點 P、Q（異於點 A、B），且交角均為 $45°$。

請證明：$\overline{PC}\cdot\overline{QE}+\overline{PD}\cdot\overline{QF}<2$



解：

如右圖，先不妨假設 $\overline{CD}$ 的中點 M 在先 $\overline{PC}$ 上。



考慮圓心 O 到弦 $\overline{CD}$ 的距離 $\overline{OM}=\alpha$，

則 $\overline{MP}=\overline{OM}=\alpha$。

又 $\overline{MD}=\sqrt{\overline{OD}^2-\overline{OM}^2}=\sqrt{1-\alpha^2}=\overline{MC}$

所以 $\overline{PC}=\sqrt{1-\alpha^2}+\alpha$、$\overline{PD}=\sqrt{1-\alpha^2}-\alpha$。

同理，若 $\overline{EF}$ 的弦心距為 β，則(1)$\begin{cases}\overline{QE}=\sqrt{1-\beta^2}+\beta\\ \overline{QF}=\sqrt{1-\beta^2}-\beta\end{cases}$或(2)$\begin{cases}\overline{QE}=\sqrt{1-\beta^2}-\beta\\ \overline{QF}=\sqrt{1-\beta^2}+\beta\end{cases}$。

若為狀況(1)，則 $\alpha\neq\beta$。

此時 $\overline{PC}\cdot\overline{QE}+\overline{PD}\cdot\overline{QF}=2\sqrt{(1-\alpha^2)(1-\beta^2)}+2\alpha\beta<2$

$\Leftrightarrow\sqrt{(1-\alpha^2)(1-\beta^2)}<1-\alpha\beta\Leftrightarrow(1-\alpha^2)(1-\beta^2)<(1-\alpha\beta)^2\Leftrightarrow(\alpha-\beta)^2>0$ 成立。

若為狀況(2)，此時 $\overline{PC}\cdot\overline{QE}+\overline{PD}\cdot\overline{QF}=2\sqrt{(1-\alpha^2)(1-\beta^2)}-2\alpha\beta<2$

$\Leftrightarrow\sqrt{(1-\alpha^2)(1-\beta^2)}<1+\alpha\beta\Leftrightarrow(1-\alpha^2)(1-\beta^2)<(1+\alpha\beta)^2\Leftrightarrow(\alpha+\beta)^2>0$ 成立。

綜合以上即可證得 $\overline{PC}\cdot\overline{QE}+\overline{PD}\cdot\overline{QF}<2$。

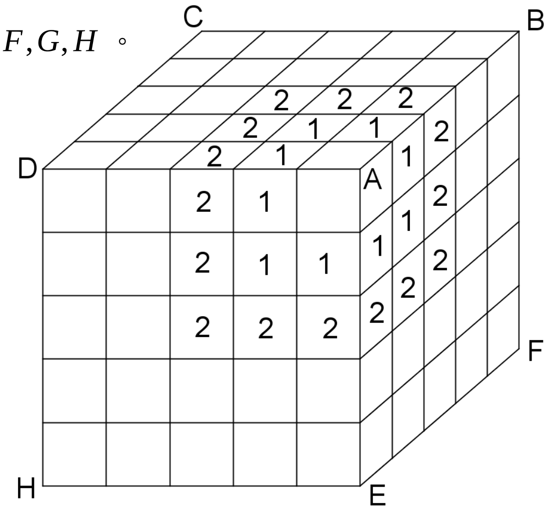
6-6 有一個$5\times5\times5$的正立方體的每個表面被格線劃分成 25 個1×1的正方形方格（6 個面共有 150 個正方形方格）。小綠將每個方格塗上紅色、藍色或綠色這三種顏色之一，而且使得沒有任何相鄰的兩個方格是同色的。請問小綠至少會將幾個方格塗上綠色？

（註：所謂「相鄰的方格」是指「有公共邊的方格」，未必要在正立方體的同一表面上。）

答：18。

解：

假設正立方體的 8 個頂點分別為 A,B,C,D,E,F,G,H 。



如下圖，考慮包含頂點 A 的 3 個方格，
因為兩兩相鄰，所以必定
紅色、藍色、綠色的方格各一。
所以包含頂點的所有方格中，
必定有 8 個綠色方格。

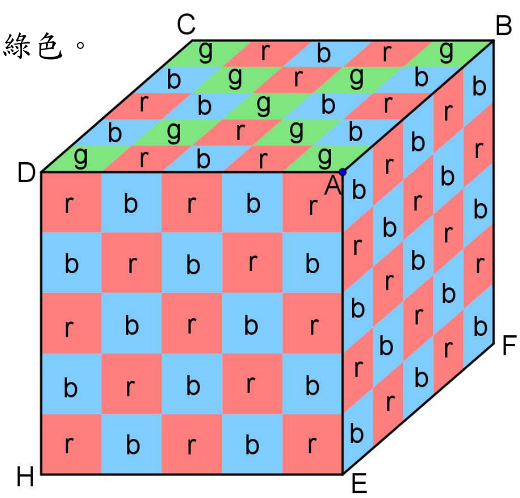
再考慮交於 A 點的三個表面，
將其上的方格編號如右圖。

編號 1 的方格繞成一圈，若只塗上紅色、藍色，則格數必為偶數，
但編號 1 的方格有 9 格，所以必定至少有一個方格是綠色的。

於是對頂點 B,C,D,E,F,G,H 而言，也都可以有對應的編號 1 的方格，
而且這些方格不會重複，也可以證明都至少存在一個綠色方格。

同理也可以證明上圖編號 2 的方格中，至少有一個方格是綠色的。
於是對頂點 G 而言，也可以有對應的編號 2 的方格，
而且這些方格不會重複，也可以證明至少存在一個綠色方格。

綜合以上所述，可知小綠至少會將 18 個方格塗上綠色。



右圖是 1 種只有 18 個綠色方格的塗色法，
其中紅、藍、綠分別以 r、b、g 表示。
相對的表面施以同樣的塗色法，
即 $ABCD$ 與 $EFGH$ 塗色法相同；
$ADHE$ 與 $BCGF$ 塗色法相同；
$AEFB$ 與 $DHGC$ 塗色法相同。