

北一女中 105 學年度下學期《數戰數決》有獎徵答活動

第六期題目：

2017 年 06 月 15 日下午 1 點鐘截止

6-1 已知 a, b, c 為非零實數，並且滿足： $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ 成等差數列、 $3a, 4b, 5c$ 成等比數

列。請求出 $\frac{a}{c} + \frac{c}{a}$ 之值。

6-2 黑板上有 2017 個 5 次多項式，這些多項式的每一項係數都是非負實數，且領導係數都是 1。現在小綠可以將黑板上的多項式「修改」：

每次「修改」，小綠都可以任意挑選兩個黑板上的多項式 $f_0(x), g_0(x)$ 擦掉，並且補寫上另外兩個多項式 $f_1(x), g_1(x)$ ，使得「 $f_0(x) + g_0(x) = f_1(x) + g_1(x)$ 」或「 $f_0(x) \cdot g_0(x) = f_1(x) \cdot g_1(x)$ 」之一成立，且 $f_1(x), g_1(x)$ 仍是領導係數均為 1 的 5 次多項式。

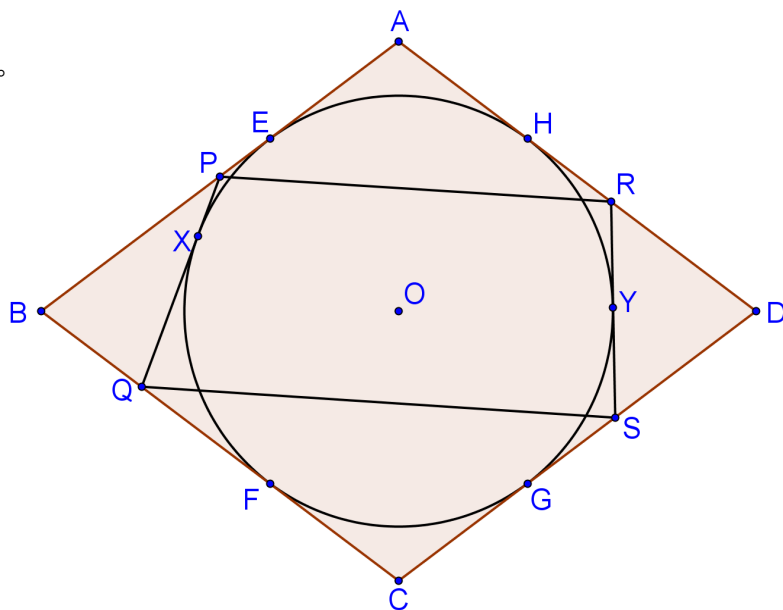
請證明：不論小綠「修改」了多少次以及如何「修改」，都不可能讓黑板上的每個多項式 $f(x)$ 滿足 $f(x) = 0$ 的根都是正實數。

6-3 如下圖，已知 $ABCD$ 為菱形，且其內切圓 O 與四邊 $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ 切於點

E, F, G, H 。過 \widehat{EF} 上一點 X 作圓 O 之切線分別交 $\overline{AB}, \overline{BC}$ 於點 P, Q ；過 \widehat{GH}

上一點 Y 作圓 O 之切線分別交 $\overline{CD}, \overline{DA}$ 於點 S, R ，連接 $\overline{PR}, \overline{QS}$ 。

請證明： $\overline{PR} \parallel \overline{QS}$ 。

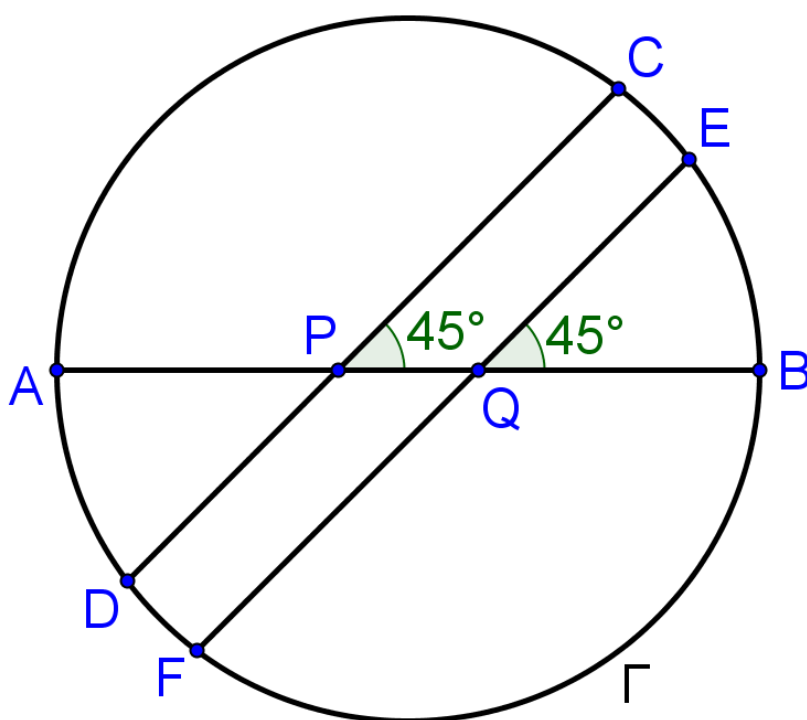


6-4 已知實數數列 a_0, a_1, a_2, \dots 是無窮多項的等差數列。

請證明：對於任意 $n \in \mathbb{N}$ ， $f_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k C_k^n x^k (1-x)^{n-k}$ 都是 x 的一次多項式。

6-5 如下圖，已知圓 Γ 的半徑為 1。圓 Γ 內有兩平行弦 \overline{CD} 、 \overline{EF} 分別與直徑 \overline{AB} 交於點 P 、 Q （異於點 A 、 B ），且交角均為 45° 。

請證明： $\overline{PC} \cdot \overline{QE} + \overline{PD} \cdot \overline{QF} < 2$



6-6 有一個 $5 \times 5 \times 5$ 的正立方體的每個表面被格線劃分成 25 個 1×1 的正方形方格（6 個面共有 150 個正方形方格）。小綠將每個方格塗上紅色、藍色或綠色這三種顏色之一，而且使得沒有任何相鄰的兩個方格是同色的。請問小綠至少會將幾個方格塗上綠色？

（註：所謂「相鄰的方格」是指「有公共邊的方格」，未必要在正立方體的同表面上。）