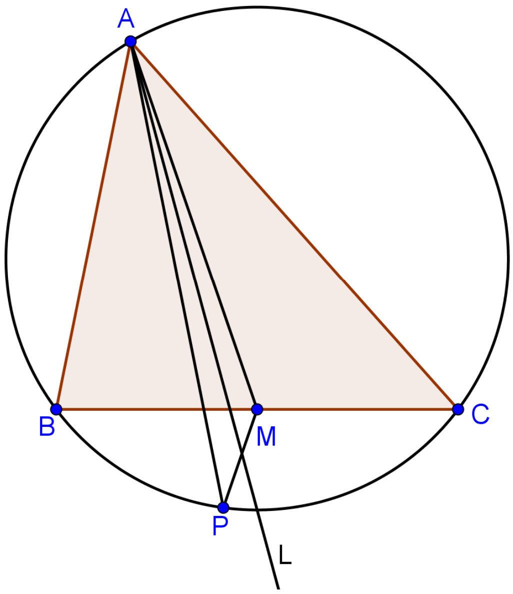
北一女中 105 學年度下學期《數戰數決》有獎徵答活動

第五期解答：

5-1　如下圖，已知$\triangle ABC$中，$\overline{AB}<\overline{AC}$。假設$\overline{BC}$的中點為$M$，且$\angle BAC$的角平分線為$L$。作$\triangle ABC$的外接圓，且在$\overset{\frown}{BC}$上取一點$P$，使得$L$也平分$\angle PAM$。請證明：$\angle BMP=\angle BMA$。



解：

延長直線AM交$\triangle ABC$的外接圓於點Q。

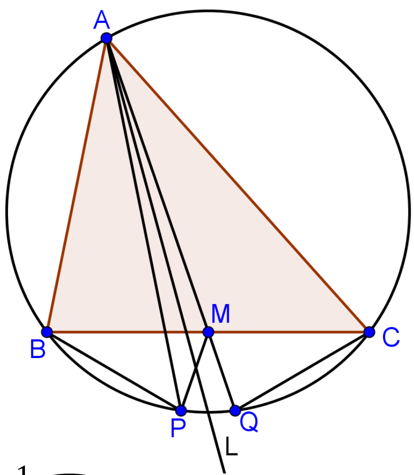
連接$\overline{BP}$、$\overline{CQ}$。

因為L平分$\angle BAC$與$\angle PAM$，

所以$\angle BAP=\angle CAQ$，

於是$\overset{\frown}{BP}=\overset{\frown}{CQ}\Rightarrow\overline{BP}=\overline{CQ}$。

又$\overline{BM}=\overline{MC}$，



且$\angle MBP=\frac{1}{2}\overset{\frown}{PQC}=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{PQ}+\overset{\frown}{QC})=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{PQ}+\overset{\frown}{BP})=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BPQ}=\angle MCQ$，

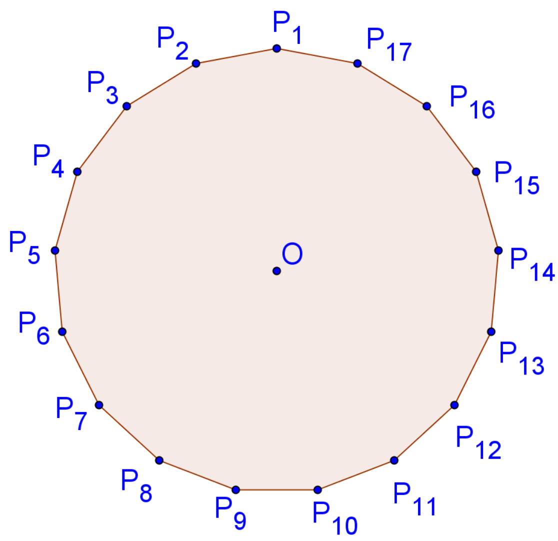
所以$\triangle MBP\cong\triangle MCQ$（SAS 全等性質）

$\Rightarrow\angle BMP=\angle CMQ=\angle BMA$（對頂角相等），證畢。

5-2 小青從正 17 邊形的頂點中任選 2 個去掉之後剩下 15 個頂點，小綠再從這 15 個點中任選 3 個點，並以線段互相連接後得到一個三角形。
請證明：小綠得到等腰三角形的機率是固定的，與小青選取哪 2 個點無關。
並求出小綠得到等腰三角形的機率。

答：$\dfrac{1}{5}$。

解：



如右圖，$P_1P_2\cdots\cdots P_{17}$ 為正十七邊形。

在這 17 個頂點中，假設取 3 點可連接成等腰三角形所形成的集合為 I。

計算 $n(I)$：

而由於直線 P_1O 為 $\overline{P_2P_{17}},\overline{P_3P_{16}},\overline{P_4P_{15}},$

$\cdots\cdots,\overline{P_9P_{10}}$ 這 8 個線段的中垂線，

所以在集合 I 中，以 P_1 為頂角的元素（等腰三角形）有 8 個，
故 $n(I)=8\times17=136$。

由對稱性，可不妨假設小青選取的其中一個點為 P_1，
再假設小青選取的另一個點為 P_n。

在集合 I 中，
以 P_1 為頂角的元素（等腰三角形）有 8 個；
當 $2\le k\le17$ 時，以 P_1、P_k 為兩底角的元素（等腰三角形）有 1 個；
故以 P_1 為其中一頂點的元素（等腰三角形）有 $8+16=24$ 個。
同理，以 P_n 為其中一頂點的元素（等腰三角形）也有 24 個。

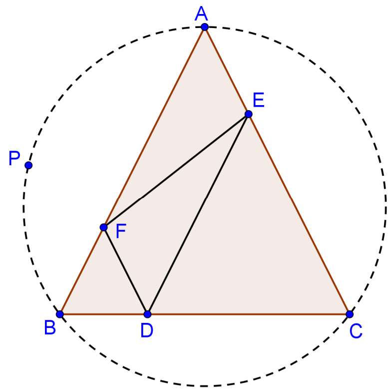
但以 P_1 為頂角、P_n 為一底角的元素（等腰三角形）有 1 個；
以 P_n 為頂角、P_1 為一底角的元素（等腰三角形）有 1 個；
以 P_1、P_n 為兩底角的元素（等腰三角形）有 1 個；
所以由取捨原理，小綠可能得到的等腰三角形只剩 $136-24-24+3=91$ 個。

但小綠從 15 個點中任選 3 個點有 $C_3^{15}=455$ 種方法，

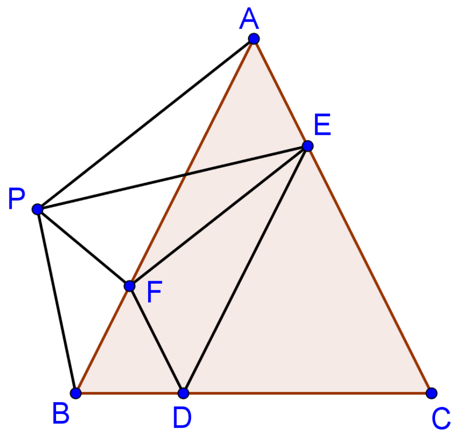
所以小綠得到等腰三角形的機率為 $\dfrac{91}{455}=\dfrac{1}{5}$。

5-3 如下圖，已知$\triangle ABC$為等腰三角形，其中$\overline{AB}=\overline{AC}$。分別在$\overline{BC},\overline{CA},\overline{AB}$各取一點$D,E,F$，使得$AFDE$為平行四邊形。連接直線$EF$，再作$D$點對直線$EF$的對稱點$P$。

請證明：P必定恰好落在$\triangle ABC$的外接圓上。



解：



連接$\overline{PA},\overline{PB},\overline{PE},\overline{PF}$。

因為$AFDE$為平行四邊形，所以$\overline{AE}=\overline{FD}$且$\overline{AF}=\overline{ED}$。

又因為D與P對稱於$\overline{EF}$，所以$\overline{FD}=\overline{FP}$且$\overline{ED}=\overline{EP}$。

於是$\overline{AE}=\overline{FP}$且$\overline{AF}=\overline{EP}$，又$\overline{AP}=\overline{AP}$，

所以$\triangle PAE \cong \triangle APF$（SSS 全等性質）$\Rightarrow \angle PAE=\angle APF$。

因為$\overline{FD}//\overline{AC}$，所以$\angle FDB=\angle ACB=\angle ABC \Rightarrow \overline{FB}=\overline{FD}$

又因為D與P對稱於$\overline{EF}$，所以$\overline{FD}=\overline{FP}$，於是$\overline{FB}=\overline{FP} \Rightarrow \angle FPB=\angle FBP$。

綜合以上，因為$\angle PAE=\angle APF$、$\angle FPB=\angle FBP$、$\angle ACB=\angle ABC$，

所以$\angle APB+\angle ACB=(\angle APF+\angle FPB)+\angle ACB$

$$=\frac{1}{2}(\angle APF+\angle PAE)+\frac{1}{2}(\angle FPB+\angle FBP)+\frac{1}{2}(\angle ACB+\angle ABC)$$

$$=\frac{1}{2}\times\text{四邊形 } APBC \text{ 的內角和}=\frac{1}{2}\times 360^\circ=180^\circ，$$

故A、P、B、C四點共圓，亦即P恰好落在$\triangle ABC$的外接圓上，證畢。

5-4 小綠從$1,2,3,\cdots\cdots,2017$這 2017 個正整數中挑出 n 個合數，使得這 n 個數兩兩互質。試求出 n 的最大可能值。（註：當正整數 n 大於 1，且「除了 1 和 n 以外，n 還有其他的因數」，我們稱 n 為合數。）

答：14。

解：

考慮 $2^2,3^2,5^2,7^2,11^2,13^2,17^2,19^2,23^2,29^2,31^2,37^2,41^2,43^2$ 這 14 個數，

顯然都是合數且兩兩互質，所以 n 至少可以是 14。

現在證明 n 不能超過 14：

假設小綠挑選了 $a_1,a_2,\cdots\cdots,a_{15}$ 滿足題目敘述，且 a_k 的最小質因數為 p_k。

顯然 $p_1,p_2,\cdots\cdots,p_{15}$ 兩兩互異（否則與 $a_1,a_2,\cdots\cdots,a_{15}$ 兩兩互質矛盾），

故必有一個 $p_m \ge 47$，此時 $a_m \ge 47\times 47 > 2017$，矛盾。

綜合以上，可證得 n 的最大可能值為 14。

5-5 小綠選取了 2017 個正整數，並將此 2017 個數圍成一圈，使得其中任意**相鄰**兩數的差，恰好與此二數的最大公因數相等。令這 2017 個數的乘積為 P。

(1) 試求出 P 的最小可能值。

(2) 假設第(1)小題的答案為 N，
請證明：不論小綠怎麼選取，都必有 $N \mid P$。

答：(1) $2^{1010}\times 3$。

解：

考慮小綠選取的數依序為 $\underbrace{1,2,1,2,1,2,\cdots\cdots,1,2}_{2014個數},3,4,2$ 圍成一圈，

則相鄰兩數只有 $1,2$ 、 $2,3$ 、 $3,4$ 、 $2,4$ 這四種情形，

且都滿足「此二數的差恰好與此二數的最大公因數相等」，故此選取滿足題意。

此時， $P=2^{1007}\times 3\times 4\times 2=2^{1010}\times 3$ 。

以下證明不論小綠怎麼選取，都必有 $(2^{1010}\times 3)\mid P$ ：

假設小綠圍成一圈的數依序為 $a_1,a_2,a_3,\cdots\cdots,a_{2017}$ 。

若有相鄰兩數 a_i,a_j 均為奇數，則其差為偶數，

此偶數必須為奇數 a_i,a_j 的最大公因數，矛盾。

故 $a_1,a_2,a_3,\cdots\cdots,a_{2017}$ 的任意相鄰兩數中，必至少有一偶數。

所以在圍成一圈的 $a_1,a_2,a_3,\cdots\cdots,a_{2017}$ 這 2017 個數中，至少有 1009 個偶數。

（每個偶數只能構成 2 組相鄰兩數含有偶數的組合，但相鄰兩數共有 2017 組，所以只有 1008 個偶數是不夠的。）

於是必定有相鄰兩數都是偶數，不妨假設是 a_1,a_2 。

但若 a_1,a_2 都不是 4 的倍數，則 a_1,a_2 的差必為 4 的倍數，即 a_1,a_2 的最大公因數是 4 的倍數，矛盾。故 a_1,a_2 中至少有一個是 4 的倍數。

綜合以上可知 $P=a_1a_2a_3\cdots\cdots a_{2017}$ 必定是 2^{1010} 的倍數。。

再假設 $a_1,a_2,a_3,\cdots\cdots,a_{2017}$ 都沒有 3 的倍數，則相鄰兩數除以 3 之後必定恰好一者餘 1、一者餘 2。（否則相鄰兩數的差為 3 的倍數，即此二數的最大公因數為 3 的倍數，矛盾。）但 $a_1,a_2,a_3,\cdots\cdots,a_{2017}$ 有 2017 個數，個數為奇數，不可能相鄰兩數除以 3 之後必定恰好一者餘 1、一者餘 2，所以 $a_1,a_2,a_3,\cdots\cdots,a_{2017}$ 中至少有一數為 3 的倍數，故 $P=a_1a_2a_3\cdots\cdots a_{2017}$ 必定是 3 的倍數。

所以我們可以知道不論小綠怎麼選取，都必有 $(2^{1010}\times 3)\mid P$ 。

又因為我們已經構造出一組 $P=2^{1010}\times 3$ 的例子，所以 P 的最小值 $N=2^{1010}\times 3$ 。

5-6　已知實數 a,b,c,d 滿足 $ab+bc+cd=1$，

試求出函數 $f(a,b,c,d)=(a^2+ac+c^2)(b^2+bd+d^2)$ 的最小值。

答：$\frac{3}{4}$

解：

已知條件 $ab+bc+cd$ 為二次式，

且 $f(a,b,c,d)=(a^2+ac+c^2)(b^2+bd+d^2)$ 為四次式，

所以可考慮 $f(a,b,c,d)-1^2=(a^2+ac+c^2)(b^2+bd+d^2)-(ab+bc+cd)^2$

$$\begin{aligned}
&=(a^2b^2+a^2bd+a^2d^2+ab^2c+abcd+acd^2+b^2c^2+bc^2d+c^2d^2)\\
&\qquad -(a^2b^2+b^2c^2+c^2d^2+2ab^2c+2bc^2d+2abcd)\\
&=a^2bd+a^2d^2-ab^2c-abcd+acd^2-bc^2d\\
&=(a^2bd-ab^2c)+(a^2d^2-abcd)+(acd^2-bc^2d)\\
&=ab(ad-bc)+ad(ad-bc)+cd(ad-bc)\\
&=(ad-bc)(ab+ad+cd)\\
&=(ad-bc)[(ab+bc+cd)+(ad-bc)]\\
&=(ad-bc)[1+(ad-bc)]，
\end{aligned}$$

令 $K=ad-bc$，

則 $f(a,b,c,d)=1^2+K(1+K)=K^2+K+1=(K+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}$。

又，取 $a=-\frac{1}{2},b=0,c=1,d=1$，即可滿足 $ab+bc+cd=1$，

且使得 $K=ad-bc=-\frac{1}{2}$，

而此時 $f(a,b,c,d)=f(-\frac{1}{2},0,1,1)=(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1)(0+0+1)=\frac{3}{4}\times1=\frac{3}{4}$。

故 $f(a,b,c,d)$ 即為 $\frac{3}{4}$。