

北一女中 105 學年度下學期《數戰數決》有獎徵答活動

第四期題目：

2017 年 03 月 23 日下午 1 點鐘截止

4-1 請證明： $\underbrace{\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\sqrt{5\cdots\sqrt{2016\sqrt{2017}}}}}}}_{\text{共2016個}\sqrt{}} < 3$ 。

4-2 小綠在 $1, 2, 3, \dots, 2017$ 這 2017 個正整數之中選出 n 個數，這 n 個數排成一列可以形成一個公比大於 1 的等比數列。則 n 的最大值為何？

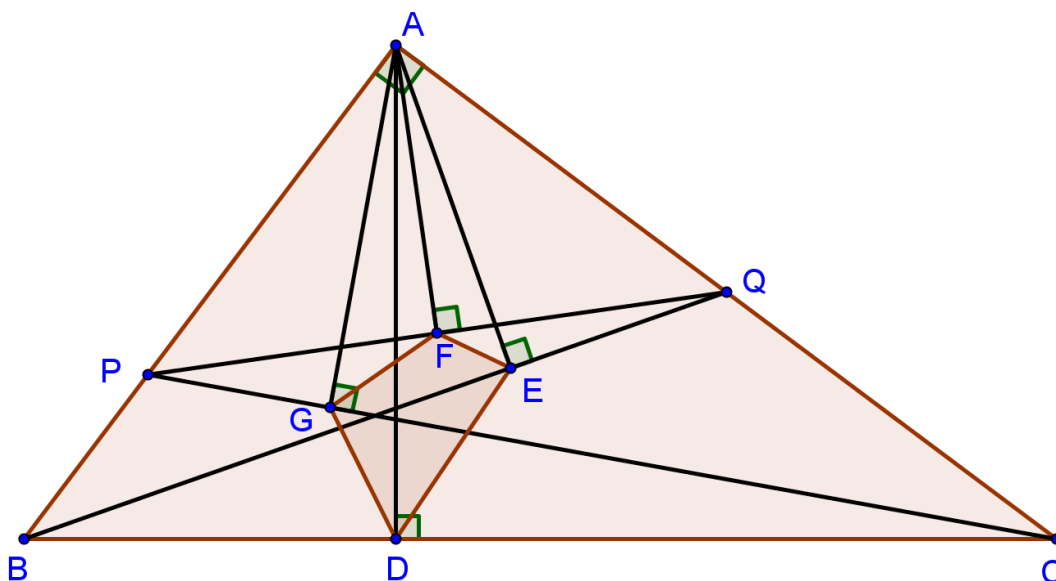
4-3 已知直角三角形 ABC 中， $\angle A = 90^\circ$ 。

如下圖，分別在 \overline{AB} 上取一點 P 、在 \overline{AC} 上取一點 Q 後，

連接 \overline{PQ} 、 \overline{BQ} 、 \overline{CP} 。

過 A 點分別對 \overline{BC} 、 \overline{BQ} 、 \overline{PQ} 、 \overline{CP} 做垂線，垂足依序為 D 、 E 、 F 、 G ，

請證明： D 、 E 、 F 、 G 四點共圓。

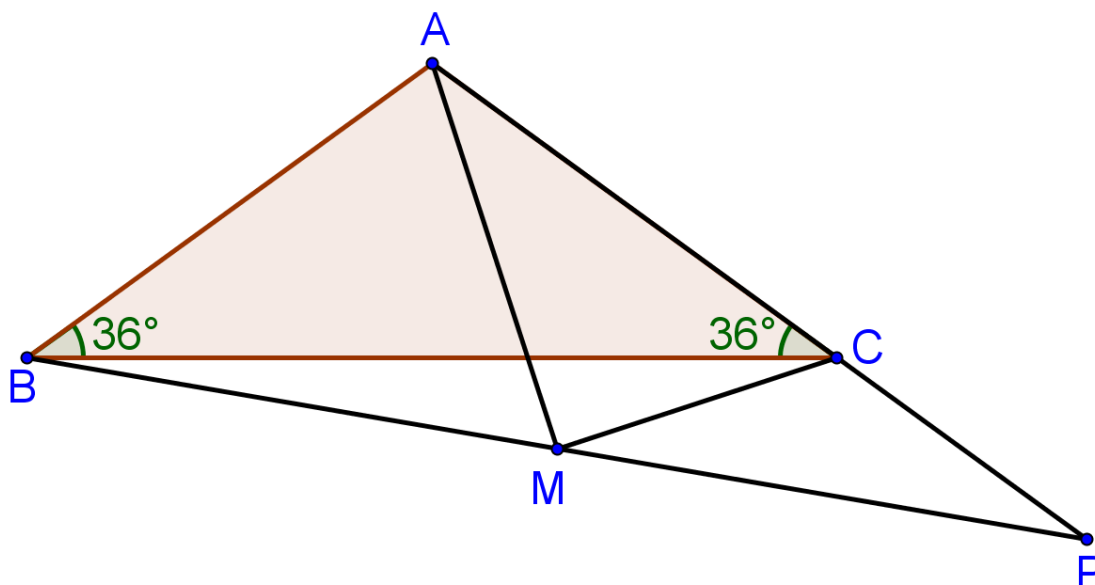


4-4 已知當 $x > 1$ 且 $y > 1$ 時，不等式 $\log(xy) \leq \log K \cdot \sqrt{(\log x)^2 + (\log y)^2}$ 都成立，則 K 的最小值為何？（註：不等式中 \log 的底數均為 10。）

4-5 已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = \angle C = 36^\circ$ 。

如下圖，延長 AC 至 P 點，使得 $\overline{AP} = \overline{BC}$ ，連接 \overline{BP} 。

取 \overline{BP} 中點 M ，連接 \overline{AM} 、 \overline{MC} ，請證明： $\overline{AM} \perp \overline{MC}$ 。



4-6 已知 $w \leq x \leq y \leq z$ ，

請求出所有滿足方程組 $\begin{cases} w + x + y + z = 10 \\ w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 30 \\ w^3 + x^3 + y^3 + z^3 = 100 \\ wxyz = 24 \end{cases}$ 的實數解。