北一女中 105 學年度下學期《數戰數決》有獎徵答活動

第四期解答：

4-1　請證明：$\underbrace{\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\sqrt{5\cdots\cdots\sqrt{2016\sqrt{2017}}}}}}}_{\text{共}2016\text{個}\sqrt{\ }} < 3$。

解：

$$\sqrt{2017} < 2018$$

$$\sqrt{2016\sqrt{2017}} < \sqrt{2016\times 2018} = \sqrt{2017^2-1} < 2017$$

$$\underbrace{\sqrt{2015\sqrt{2016\sqrt{2017}}}}_{\text{共}3\text{個}\sqrt{\ }} < \sqrt{2015\times 2017} = \sqrt{2016^2-1} < 2016$$

$$\underbrace{\sqrt{2014\sqrt{2015\sqrt{2016\sqrt{2017}}}}}_{\text{共}4\text{個}\sqrt{\ }} < \sqrt{2014\times 2016} = \sqrt{2015^2-1} < 2015$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$\underbrace{\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\sqrt{5\cdots\cdots\sqrt{2016\sqrt{2017}}}}}}}_{\text{共}2016\text{個}\sqrt{\ }} < \sqrt{2\times 4} = \sqrt{3^2-1} < 3$，證畢。

4-2 小綠在$1,2,3,\cdots\cdots,2017$這 2017 個正整數之中選出 n 個數，這 n 個數排成一列可以形成一個公比大於 1 的等比數列。則 n 的最大值為何？

答：11。

解：

假設此等比數列為$a_1,a_2,a_3,\cdots\cdots,a_n$，且公比為 r。

因為此等比數列的每一項都是正整數，所以其公比 r 必為正有理數。

若 r 為正整數，則$r\geq 2$，

所以$a_n=a_1\cdot r^{n-1}\leq 2017$

$\Rightarrow 2^{n-1}\leq r^{n-1}\leq a_1\cdot r^{n-1}=a_n\leq 2017<2^{11}\Rightarrow n-1\leq 10\Rightarrow n\leq 11$，

且取數列為$2^0,2^1,2^2,\cdots\cdots,2^{10}$時，$n$ 為 11 達到最大值。

若 r 為非整數之正有理數，假設公比為$r=\dfrac{q}{p}>1$，其中 $p,q\in\mathbb{N}$ 且 p,q 互質。

因為$r=\dfrac{q}{p}>1$則，所以$q\geq 2$。

因為$a_n=a_1\cdot(\dfrac{q}{p})^{n-1}\Rightarrow a_1\cdot q^{n-1}=a_n\cdot p^{n-1}\Rightarrow q^{n-1}\,|\,a_n\Rightarrow q^{n-1}\leq a_n$，

且$q\geq 2$、$a_n\leq 2017$，

所以$2^{n-1}\leq q^{n-1}\leq a_n\leq 2017<2^{11}\Rightarrow n-1<11\Rightarrow n\leq 11$。

綜合以上所述，n 的最大值為 11。

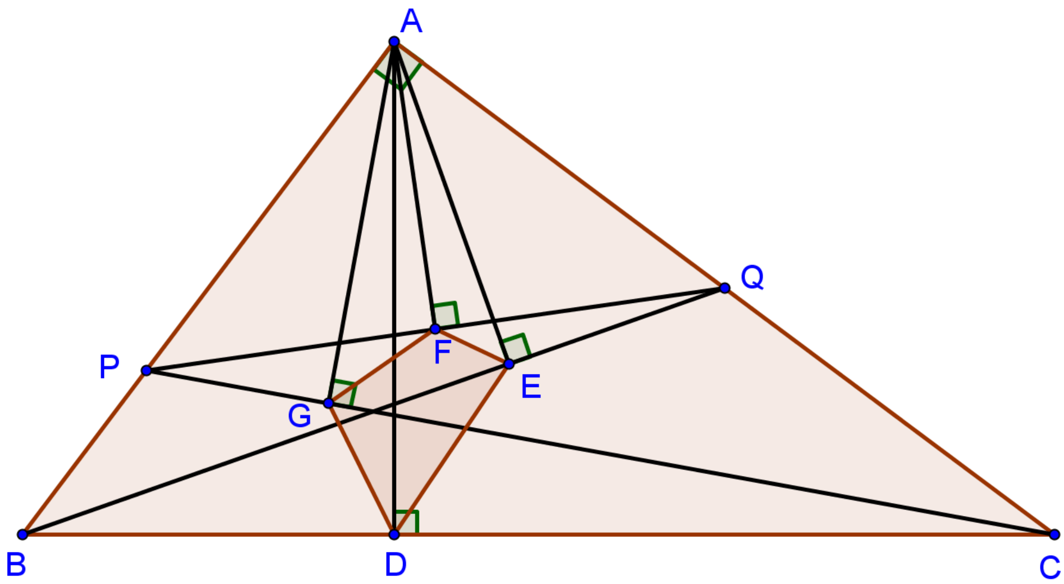
4-3 已知直角三角形 ABC 中，$\angle A = 90°$。

如下圖，分別在 $\overline{AB}$ 上取一點 P、在 $\overline{AC}$ 上取一點 Q 後，

連接 $\overline{PQ}$、$\overline{BQ}$、$\overline{CP}$。

過 A 點分別對 $\overline{BC}$、$\overline{BQ}$、$\overline{PQ}$、$\overline{CP}$ 做垂線，垂足依序為 D、E、F、G，

請證明：D、E、F、G 四點共圓。



解：

因為 $\angle AFP = \angle AGP = 90°$，所以 A、P、G、F 四點共圓，故 $\angle FGC = \angle FAP$。
因為 $\angle AFQ = \angle AEQ = 90°$，所以 A、Q、E、F 四點共圓，故 $\angle FEB = \angle FAQ$。
因為 $\angle AGC = \angle ADC = 90°$，所以 A、G、D、C 四點共圓，故 $\angle CGD = \angle CAD$。
因為 $\angle AEB = \angle ADB = 90°$，所以 A、E、D、B 四點共圓，故 $\angle BED = \angle BAD$。

於是
$$\begin{aligned}\angle FGD + \angle FED &= (\angle FGC + \angle CGD) + (\angle FEB + \angle BED) \\ &= (\angle FAP + \angle CAD) + (\angle FAQ + \angle BAD) \\ &= (\angle FAP + \angle FAQ) + (\angle CAD + \angle BAD) \\ &= \angle BAC + \angle BAC = 90° + 90° = 180°，\end{aligned}$$

故 D、E、F、G 四點共圓，證畢。

4-4　已知當 $x>1$ 且 $y>1$ 時，不等式 $\log(xy)\le\log K\cdot\sqrt{(\log x)^2+(\log y)^2}$ 都成立，

則 K 的最小值為何？（註：不等式中 log 的底數均為 10。）

答：$10^{\sqrt{2}}$

解：

取 $x=y=10$ 時，不等式為 $\log 100\le\log K\cdot\sqrt{(\log 10)^2+(\log 10)^2}$ 成立，

所以 $2\le\log K\cdot\sqrt{1^2+1^2}\Rightarrow\log K\ge\sqrt{2}\Rightarrow K\ge 10^{\sqrt{2}}$ 。

再證明 $K=10^{\sqrt{2}}$ 時，題目中的不等式恆成立：

當 $K=10^{\sqrt{2}}$ 時，

$\log(xy)\le\log K\cdot\sqrt{(\log x)^2+(\log y)^2}$

$\Leftrightarrow\log(xy)\le\sqrt{2}\cdot\sqrt{(\log x)^2+(\log y)^2}$

$\Leftrightarrow\log x+\log y\le\sqrt{2[(\log x)^2+(\log y)^2]}$

$\Leftrightarrow(\log x+\log y)^2\le 2[(\log x)^2+(\log y)^2]$

$\Leftrightarrow(\log x)^2+2\log x\log y+(\log y)^2\le 2[(\log x)^2+(\log y)^2]$

$\Leftrightarrow(\log x)^2-2\log x\log y+(\log y)^2\ge 0$

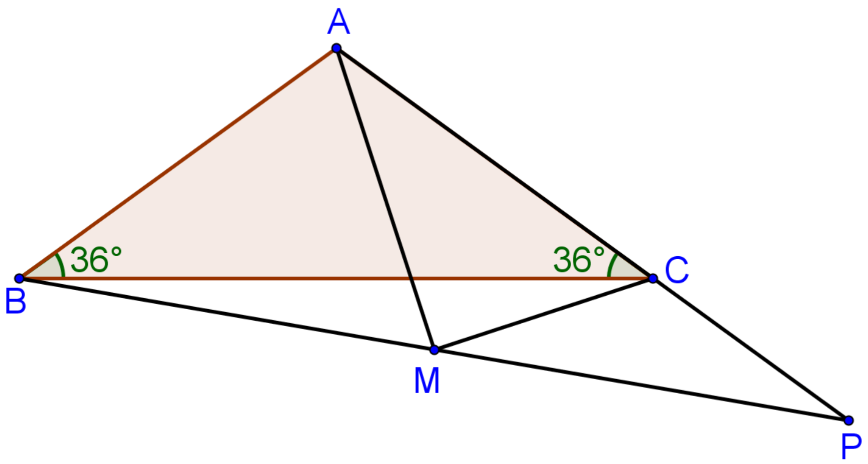
$\Leftrightarrow(\log x-\log y)^2\ge 0$ 恆成立。

綜合以上可知 K 的最小值即為 $10^{\sqrt{2}}$ 。

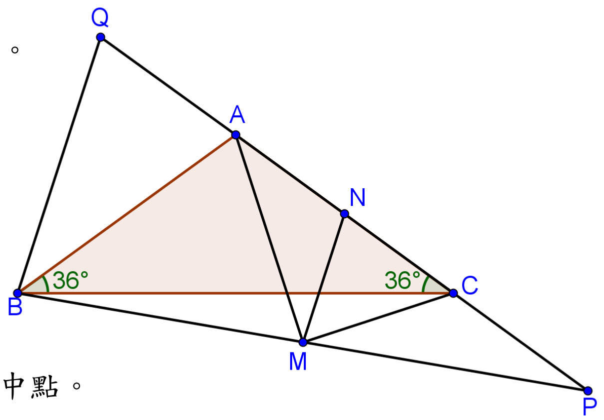
4-5　已知$\triangle ABC$中，$\angle B=\angle C=36^\circ$。

如下圖，延長AC至P點，使得$\overline{AP}=\overline{BC}$，連接$\overline{BP}$。

取$\overline{BP}$中點M，連接$\overline{AM}$、$\overline{MC}$，請證明：$\overline{AM}\perp\overline{MC}$。



解：



在射線CA上取一點Q，使得$\overline{CQ}=\overline{AP}$。

再取$\overline{AC}$的中點N，連接$\overline{MN}$、$\overline{BQ}$。

因為$\overline{CQ}=\overline{AP}$，所以$\overline{AQ}=\overline{CP}$，

又N為$\overline{AC}$的中點，所以N也是$\overline{QP}$的中點。

因為$\overline{CQ}=\overline{AP}=\overline{BC}$且$\angle ACB=36^\circ$，所以$\angle CQB=\angle CBQ=72^\circ$。

又$\angle ABC=36^\circ$，所以$\angle ABQ=72^\circ-36^\circ=36^\circ$。

而$\angle QAB=180^\circ-72^\circ-36^\circ=72^\circ=\angle CQB\Rightarrow\overline{QB}=\overline{AB}$。

因為M、N分別為$\overline{BP}$、$\overline{QP}$的中點，

所以$\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{QB}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\overline{NA}=\overline{NC}$，故$N$是$\triangle AMC$的外心。

$\triangle AMC$的外心N落在邊$\overline{AC}$上，所以$\angle AMC$為直角，即$\overline{AM}\perp\overline{MC}$，證畢。

4-6　已知 $w \le x \le y \le z$，

請求出所有滿足方程組 $\begin{cases} w+x+y+z=10 \\ w^2+x^2+y^2+z^2=30 \\ w^3+x^3+y^3+z^3=100 \\ wxyz=24 \end{cases}$ 的實數解。

答：$(w,x,y,z)=(1,2,3,4)$

解：

因為 $(w+x+y+z)^2-(w^2+x^2+y^2+z^2)=2(wx+wy+wz+xy+xz+yz)$，

所以 $2(wx+wy+wz+xy+xz+yz)=10^2-30=70$

$\Rightarrow wx+wy+wz+xy+xz+yz=35$。

令 $\sigma_3=w^3+x^3+y^3+z^3$、

$\sigma_{21}=w^2x+w^2y+w^2z+x^2w+x^2y+x^2z+y^2w+y^2x+y^2z+z^2w+z^2x+z^2y$、

$\sigma_{111}=wxy+wxz+wyz+xyz$，

則 $(w+x+y+z)(wx+wy+wz+xy+xz+yz)=\sigma_{21}+3\sigma_{111}$，

且 $(w+x+y+z)(w^2+x^2+y^2+z^2)=\sigma_3+\sigma_{21}$。

所以 $\begin{cases} 10\times 35=\sigma_{21}+3\sigma_{111} \\ 10\times 30=\sigma_3+\sigma_{21}=100+\sigma_{21} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{21}=200 \\ \sigma_{111}=50 \end{cases}$。

於是 $\begin{cases} w+x+y+z=10 \\ wx+wy+wz+xy+xz+yz=35 \\ wxy+wxz+wyz+xyz=50 \\ wxyz=24 \end{cases}$，

由根與係數的關係，

以 w,x,y,z 為根的四次方程式為 $t^4-10t^3+35t^2-50t+24=0$。

$t^4-10t^3+35t^2-50t+24=0$

$\Rightarrow (t-1)(t-2)(t-3)(t-4)=0$

$\Rightarrow t=1,2,3,4$，

又因為 $w \le x \le y \le z$，所以 $(w,x,y,z)=(1,2,3,4)$。