北一女中 106 學年度上學期《數戰數決》有獎徵答活動

第三期解答：

3-1　令 $a = 2017^{2018} + 2018^{2017}$ 、 $b = 2018^{2018} + 2017^{2017}$ ，

　　請判別 a、b 的大小關係。

答： $a < b$ 。

解：

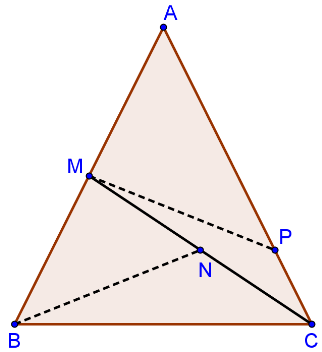
$$
\begin{aligned}
a - b &= (2017^{2018} - 2017^{2017}) + (2018^{2017} - 2018^{2018}) \\
&= 2017^{2017}(2017 - 1) + 2018^{2017}(1 - 2018) \\
&= 2017^{2017} \times 2016 - 2018^{2017} \times 2017 \\
&< 2017^{2017} \times 2017 - 2018^{2017} \times 2017 \\
&= (2017^{2017} - 2018^{2017}) \times 2017 < 0
\end{aligned}
$$

，故 $a < b$ 。

3-2 如下圖，已知等腰三角形 ABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$。取 $\overline{AB}$ 中點 M，連接 $\overline{MC}$，

令 $\overline{MC}$ 中點為 N。再於 $\overline{AC}$ 上取一點 P，使得 $\overline{AP}=3\overline{PC}$。

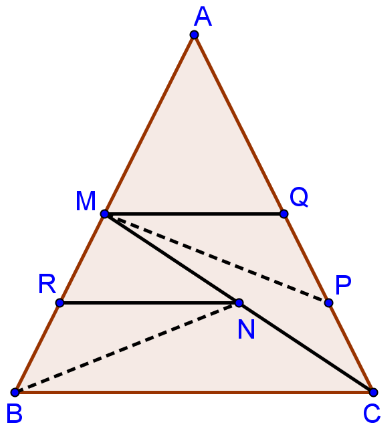
連接 $\overline{MP}$、$\overline{BN}$。 請證明：$\overline{MP}=\overline{BN}$。



解：

分別取 $\overline{AC}$ 中點 Q 與 $\overline{MB}$ 中點 R，

連接 $\overline{MQ}$、$\overline{NR}$。



因為 $\overline{AP}=3\overline{PC}$，所以 $\overline{PC}=\frac{1}{4}\overline{AC}$，

又 $\overline{AQ}=\frac{1}{2}\overline{AC}$，所以 $\overline{PQ}=\frac{1}{4}\overline{AC}$。

因為 M、Q 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 中點，所以 $\overline{MQ}\,//\,\overline{BC}$ 且 $\overline{MQ}=\frac{1}{2}\overline{BC}$。

因為 N、R 分別為 $\overline{MC}$、$\overline{MB}$ 中點，所以 $\overline{RN}\,//\,\overline{BC}$ 且 $\overline{RN}=\frac{1}{2}\overline{BC}$。

因為 $\overline{MQ}\,//\,\overline{BC}\,//\,\overline{RN}$ 且 $\overline{AB}=\overline{AC}$，

所以 $\angle MQP=180^\circ-\angle ACB=180^\circ-\angle ABC=\angle NRB$。

又 $\overline{MQ}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\overline{RN}$，$\overline{PQ}=\frac{1}{4}\overline{AC}=\frac{1}{4}\overline{AB}=\frac{1}{2}\overline{MB}=\overline{RB}$，

於是 $\triangle MQP\cong\triangle NRB$（SAS 全等性質）， 故 $\overline{MP}=\overline{BN}$，證畢。

3-3 (1) 已知 $x^4-21x^2-8x+137=(x-a)^2+(x^2-b)^2$，試求數對 (a,b)

(2) 已知 $f(x)=\sqrt{x^4-21x^2-8x+137}-\sqrt{x^4-5x^2+9}$，

試求 $f(x)$ 的最大值，並求出使得 f 達到最大值的 x 值。

答：(1) $(a,b)=(4,11)$。 (2) $f(x)$ 的最大值 $=4\sqrt{5}$，對應的 x 值為 -1。

解：

(1)

$x^4-21x^2-8x+137=(x-a)^2+(x^2-b)^2=x^4+(1-2b)x^2-2ax+(a^2+b^2)$，

對照兩邊係數可知 $\begin{cases}1-2b=-21\\-2a=-8\\a^2+b^2=137\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=4\\b=11\end{cases}$。

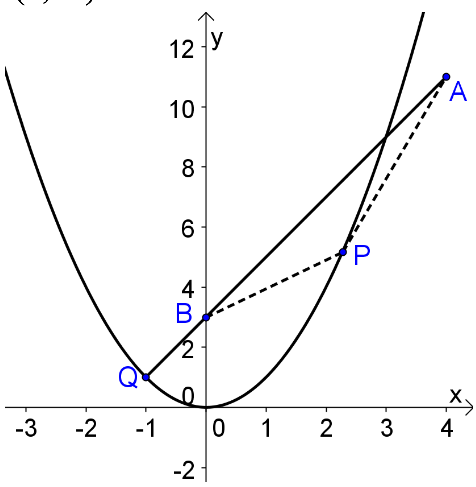
(2)

$$f(x)=\sqrt{x^4-21x^2-8x+137}-\sqrt{x^4-5x^2+9}$$

$$=\sqrt{(x-4)^2+(x^2-11)^2}-\sqrt{(x-0)^2+(x^2-3)^2}$$ 。

考慮兩定點 $A=(4,11)$、$B=(0,3)$ 以及一動點 $P=(x,x^2)$，

則動點 P 必落在拋物線 $y=x^2$ 上，如右圖。



於是 $f(x)=\overline{PA}-\overline{PB}$，

根據三角不等式可知 $f(x)=\overline{PA}-\overline{PB}\le\overline{AB}$，

而等號成立時，P 點在直線 AB 上，

且使得 B 在 A、P 之間，假設此位置為 Q 點。

因為 $A=(4,11)$、$B=(0,3)$，所以直線 AB 的方程式為 $y=2x+3$。

解直線 $AB: y=2x+3$ 與拋物線 $y=x^2$ 的交點可得兩交點為 $(-1,1)$ 與 $(3,9)$，

其中 $(-1,1)$ 才會使得 B 在 A、P 之間，故 $Q=(-1,1)$。

所以 $f(x)$ 的最大值 $=f(-1)=\overline{AB}=4\sqrt{5}$。

3-4 假設α為方程式$x^{2017}+2017x-1=0$的最小正根；

β為方程式$x^{2017}-2017x+1=0$的最小正根。

請判別α、β的大小關係。

答：$\alpha<\beta$。

解：

設$f(x)=x^{2017}+2017x-1$、$g(x)=x^{2017}-2017x+1$。

因為$f(0)=-1$、$f(1)=2017$，所以由勘根定理可知$f(x)=0$必有正根。

因為$g(0)=1$、$g(1)=-2015$，所以由勘根定理可知$g(x)=0$必有正根。

因為α為方程式$x^{2017}+2017x-1=0$的正根，

所以$\alpha^{2017}+2017\alpha-1=0\Rightarrow\alpha-\dfrac{1}{2017}=-\dfrac{1}{2017}\alpha^{2017}<0\Rightarrow\alpha<\dfrac{1}{2017}$。

因為β為方程式$x^{2017}-2017x+1=0$的正根，

所以$\beta^{2017}-2017\beta+1=0\Rightarrow\beta-\dfrac{1}{2017}=\dfrac{1}{2017}\beta^{2017}>0\Rightarrow\beta>\dfrac{1}{2017}$。

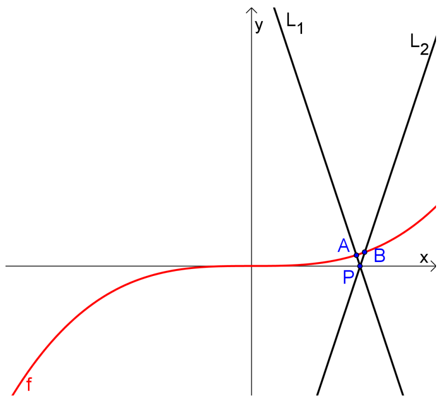
故$\alpha<\dfrac{1}{2017}<\beta$。

另解：

作$y=f(x)=x^{2017}$、直線$L_1:y=-2017x+1$以及$L_2:y=2017x-1$的圖形，

並考慮$y=f(x)$分別與L_1、L_2的交點。

如右圖（此圖僅是示意圖，未按照比例）。



L_1、L_2都是通過點$P(\dfrac{1}{2017},0)$的直線，

但L_1斜率為負、L_2斜率為正。

而$y=f(x)=x^{2017}$是嚴格遞增函數，

其圖形通過原點，

所以從$(0,0)$到$(\dfrac{1}{2017},f(\dfrac{1}{2017}))$的這一段函數圖形，

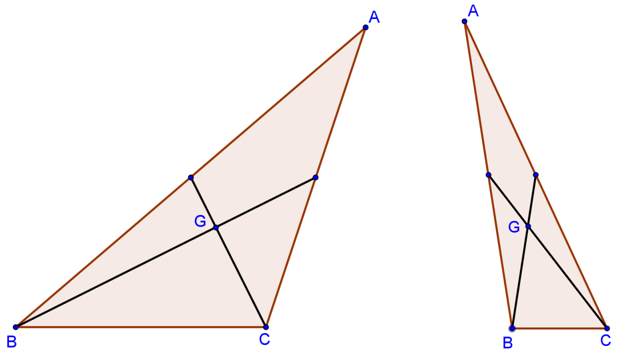
會先與L_1相交（設交點為A），

函數圖形直到過了$(\dfrac{1}{2017},f(\dfrac{1}{2017}))$才又與$L_2$相交（設交點為$B$）。

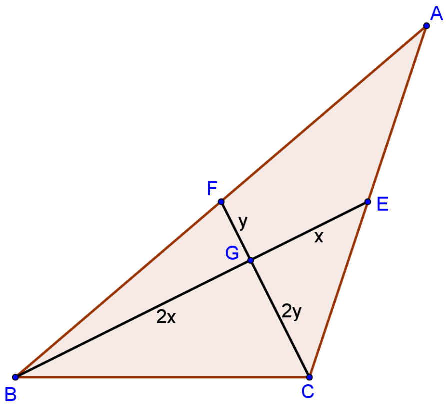
則α、β分別為點A、B的x坐標，故$\alpha<\dfrac{1}{2017}<\beta$。

3-5　如下圖，已知 G 為 $\triangle ABC$ 的重心，且 $\angle BGC \le 90^\circ$。

請證明：$\overline{AB}+\overline{AC} > 3\overline{BC}$。



解：



假設 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 的中點分別為 F、E。

則 $\overline{EG}:\overline{GB}=\overline{FG}:\overline{GC}=1:2$，

故可令 $\overline{EG}=x$、$\overline{GB}=2x$、

$\overline{FG}=y$、$\overline{GC}=2y$。

因為 $\angle BGC \le 90^\circ$，所以 $\angle FGB = \angle EGC \ge 90^\circ$，

故 $\overline{BC}^2 \le \overline{GB}^2+\overline{GC}^2=(2x)^2+(2y)^2=4(x^2+y^2)$；

$\overline{FB}^2 \ge \overline{GB}^2+\overline{GF}^2=4x^2+y^2$ 且 $\overline{EC}^2 \ge \overline{GE}^2+\overline{GC}^2=x^2+4y^2$。

所以 $\overline{AB}+\overline{AC} > 3\overline{BC} \Leftrightarrow \sqrt{4\overline{FB}^2}+\sqrt{4\overline{EC}^2} > \sqrt{9\overline{BC}^2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{4(4x^2+y^2)}+\sqrt{4(x^2+4y^2)} > \sqrt{36(x^2+y^2)}$

$\Leftrightarrow \sqrt{4x^2+y^2}+\sqrt{x^2+4y^2} > \sqrt{9(x^2+y^2)}$

（兩邊平方）$\Leftrightarrow (4x^2+y^2)+2\sqrt{(4x^2+y^2)(x^2+4y^2)}+(x^2+4y^2) > 9(x^2+y^2)$

$\Leftrightarrow \sqrt{(4x^2+y^2)(x^2+4y^2)} > 2(x^2+y^2)$

（兩邊平方）$\Leftrightarrow (4x^2+y^2)(x^2+4y^2) > 4(x^4+2x^2y^2+y^4)$

$\Leftrightarrow 9x^2y^2 > 0$ 恆成立，

故 $\overline{AB}+\overline{AC} > 3\overline{BC}$ 也成立，證畢。

3-6　已知x,y,z均為正整數。

試求出所有滿足方程式$3^x+4^y=5^z$的三元序對(x,y,z)。

答：$(x,y,z)=(2,2,2)$。

解：

如果整數a與b除以正整數n所得的餘數相同，則記為$a\equiv b\pmod n$。

$3^x+4^y\equiv 5^z\equiv 1^z\equiv 1\pmod 4\Rightarrow 3^x\equiv 1\pmod 4\Rightarrow (-1)^x\equiv 1\pmod 4\Rightarrow x$為偶數。

$5^z\equiv 3^x+4^y\equiv 0^x+1^y\equiv 1\pmod 3\Rightarrow 5^z\equiv 1\pmod 3\Rightarrow (-1)^z\equiv 1\pmod 3\Rightarrow z$為偶數。

令$x=2a$、$z=2b$，其中$a,b\in\mathbb{N}$。

則$3^{2a}+4^y=5^{2b}\Rightarrow 2^{2y}=5^{2b}-3^{2a}=(5^b-3^a)(5^b+3^a)$，

所以(5^b-3^a)與(5^b+3^a)都是 2 的冪次。

於是可令$\begin{cases}5^b-3^a=2^p\\5^b+3^a=2^q\end{cases}$……（★），其中$p,q$為非負整數且$p<q$。

（★）的兩式相減可得$2\cdot 3^a=2^q-2^p=2^p\cdot(2^{q-p}-1)$，其中$(2^{q-p}-1)$為奇數。

由算數基本定理（標準分解式唯一）可知$p=1$且$3^a=2^{q-p}-1$。

所以$2^{2y}=(5^b-3^a)(5^b+3^a)=2^1\cdot 2^q\Rightarrow q=2y-1$為奇數。

於是$3^a=2^{q-p}-1=2^{q-1}-1=2^{2y-2}-1=(2^{y-1}-1)(2^{y-1}+1)$，

所以$(2^{y-1}-1)$與$(2^{y-1}+1)$都是 3 的冪次，但$(2^{y-1}-1)$與$(2^{y-1}+1)$只相差 2，

故必有$\begin{cases}2^{y-1}-1=3^0=1\\2^{y-1}+1=3^1=3\end{cases}\Rightarrow 2^{y-1}=2\Rightarrow y=2$。

於是$q=2y-1=3$，$\begin{cases}5^b-3^a=2^p=2^1=2\\5^b+3^a=2^q=2^3=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5^b=5\\3^a=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2a=2\\z=2b=2\end{cases}$，

故$(x,y,z)=(2,2,2)$。