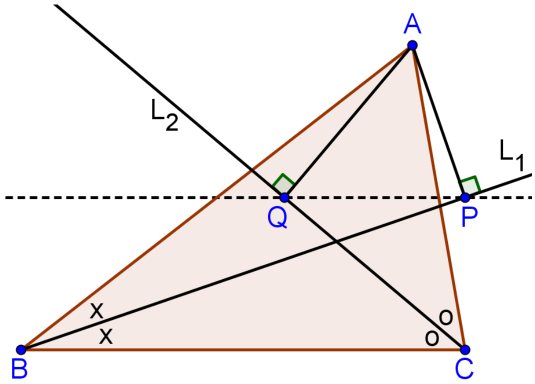
北一女中 106 學年度上學期《數戰數決》有獎徵答活動

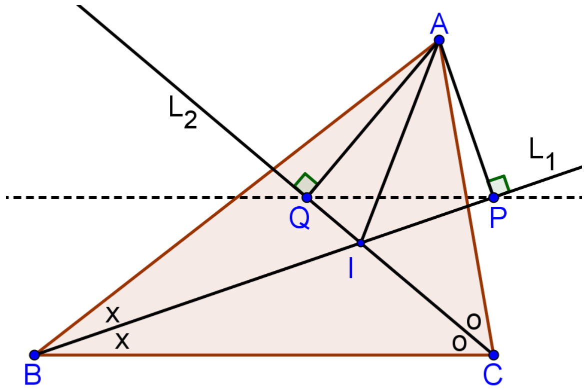
第二期解答：



2-1 如右圖，平面上$\triangle ABC$中，分別作$\angle B$與$\angle C$的內角平分線L_1與L_2。再過A點分別對L_1與L_2作垂線，垂足為P與Q，連接直線PQ。

請證明：直線$PQ // \overline{BC}$。

解：



假設L_1與L_2交於點I，
則I為$\triangle ABC$的內心。

連接$\overline{AI}$。

因為$\angle API + \angle AQI = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$，
所以A、Q、I、P四點共圓，
故$\angle PQI = \angle PAI$。

又$\angle AIP = \angle ABI + \angle IAB = \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle BAC$，

所以$\angle PAI = 180^\circ - \angle AIP - \angle API = 180^\circ - (\frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle BAC) - 90^\circ$

$$= \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ABC - \angle BAC) = \frac{1}{2}\angle ACB = \angle ICB$$

故$\angle PQI = \angle PAI = \angle ICB \Rightarrow$直線$PQ // \overline{BC}$（內錯角相等），證畢。

2-2　$f(x)$ 是定義於 $\mathbb{R}$ 上的函數，且對於 $x\in\mathbb{R}$，均有 $f(x)+(x+\frac{1}{2})f(1-x)=1$。

試求出所有滿足上述條件的函數 $f(x)$。

答：$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & ,當x=\frac{1}{2}時\\ \frac{2}{1-2x} & ,當x\neq\frac{1}{2}時\end{cases}$

解：

令 $f(x)+(x+\frac{1}{2})f(1-x)=1$ 為★式。

在★中取 $x=\frac{1}{2}$ 可得 $f(\frac{1}{2})+1\cdot f(\frac{1}{2})=1\Rightarrow f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$。

當 $y\neq\frac{1}{2}$ 時，在★中分別取 $x=y$ 與 $x=1-y$ 可得

$$\begin{cases}f(y)+(y+\frac{1}{2})f(1-y)=1\\ f(1-y)+[(1-y)+\frac{1}{2}]\cdot f(1-(1-y))=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(y)+(y+\frac{1}{2})f(1-y)=1\cdots\cdots(1)\\ f(1-y)+(\frac{3}{2}-y)f(y)=1\cdots\cdots(2)\end{cases}。$$

由 $(1)-(2)\times(y+\frac{1}{2})$ 可得 $f(y)\cdot[1-(y+\frac{1}{2})(\frac{3}{2}-y)]=1-(y+\frac{1}{2})$

$$\Rightarrow f(y)\cdot(y^2-y+\frac{1}{4})=\frac{1}{2}-y\Rightarrow f(y)\cdot(y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}-y\Rightarrow f(y)=\frac{1}{\frac{1}{2}-y}=\frac{2}{1-2y}。$$

綜合以上所述，$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & ,當x=\frac{1}{2}時\\ \frac{2}{1-2x} & ,當x\neq\frac{1}{2}時\end{cases}$。

再將此函數代入★式檢驗：

當 $x=\frac{1}{2}$ 時，$f(\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}=1$。

當 $x\neq\frac{1}{2}$ 時，$f(x)+(x+\frac{1}{2})f(1-x)=\frac{2}{1-2x}+\frac{2x+1}{2}\cdot\frac{2}{1-2(1-x)}=\frac{2x-1}{2x-1}=1$。

故 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & ,當x=\frac{1}{2}時\\ \frac{2}{1-2x} & ,當x\neq\frac{1}{2}時\end{cases}$ 確實為滿足題目條件的唯一函數。

2-3 已知正整數m,n都是四位數。某日，小綠要計算m,n的乘積，所以在紙上寫下了$m\times n$。但是調皮的摩卡卻趁小綠不注意的時候偷偷把「×」擦掉了，使得紙上留下了一個八位數。小綠發現這個八位數，恰好就是$m\times n$答案的3倍。請問正整數m,n為何？

【註：如果2017×1123的「×」被擦掉，就會變成20171123。】

答：$m=1667$、$n=3334$。

解：

由題意可知$10000m+n=3mn$，其中$1000\le m,n\le 9999$。

所以$n=(3n-10000)m\Rightarrow \dfrac{n}{m}=3n-10000$為整數。

又$\dfrac{n}{m}\le\dfrac{9999}{1000}<10$，所以$3n-10000=\dfrac{n}{m}=1,2,3,\cdots\cdots,9$，

故$n=\dfrac{10001}{3},\dfrac{10002}{3},\dfrac{10003}{3},\cdots\cdots,\dfrac{10009}{3}$，

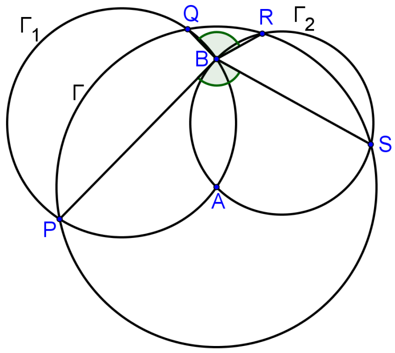
其中的整數值只有$n=\dfrac{10002}{3},\dfrac{10005}{3},\dfrac{10008}{3}=3334,3335,3336$，

而對應的$\dfrac{n}{m}=2,5,8$，所以對應的$m=\dfrac{3334}{2},\dfrac{3335}{5},\dfrac{3336}{8}=1667,667,417$，

但667與417不是四位數，不合題意。

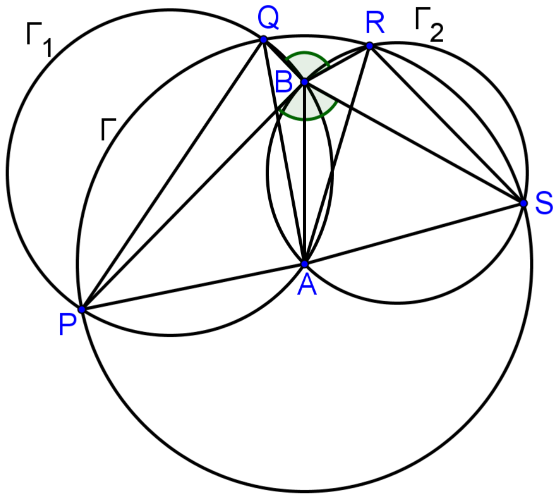
故$m=1667$、$n=3334$。

2-4 如右圖，平面上兩圓Γ_1,Γ_2交於兩點A,B。以A為圓心再作一圓Γ，使得Γ與兩圓Γ_1,Γ_2依序交於P,Q,R,S四點。連接$\overline{BP},\overline{BQ},\overline{BR},\overline{BS}$，請證明：$\angle PBS=\angle QBR$。



解：

連接$\overline{AB},\overline{AP},\overline{AQ},\overline{AR},\overline{AS},\overline{PQ},\overline{RS}$。



因為A、B、Q、P四點共圓，
所以$\angle ABQ=180^\circ-\angle APQ$。
同理可得$\angle ABR=180^\circ-\angle ASR$。

又因為$\overline{AP}=\overline{AQ}$、$\overline{AR}=\overline{AS}$，

所以$\angle APQ=\angle AQP$、$\angle ASR=\angle ARS$。

故$\angle QBR$
$=360^\circ-\angle ABQ-\angle ABR$
$=360^\circ-(180^\circ-\angle APQ)-(180^\circ-\angle ASR)$
$=\angle APQ+\angle ASR$
$=\angle AQP+\angle ARS$
$=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AP}+\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AS}$
$=\angle ABP+\angle ABS$
$=\angle PBS$，證畢。

2-5　已知 p,q,r 都是質數，且滿足 $p^q+q^p=r$。

　　試求出所有滿足上述條件的三元序對 (p,q,r)。

答：$(p,q,r)=(3,2,17)$ 或 $(2,3,17)$。

解：

因為 p,q,r 都是質數，所以 $p,q,r\geq 2$，

故 $r=p^q+q^p\geq 2^2+2^2=8$，則 r 必為奇數，

於是必有 p^q 與 q^p 是一奇數一偶數，即 p 與 q 是一奇數一偶數。

不妨先假設 p 是奇數、q 是偶數，又因為 q 是質數，所以必有 $q=2$。

於是 $p^2+2^p=r$，其中 p 與 r 都是奇質數。

如果整數 a 與 b 除以正整數 n 所得的餘數相同，則記為 $a\equiv b \pmod n$。

若 $p=6k+1$，其中 k 是非負整數，

則 $r=(6k+1)^2+2^{6k+1}\equiv 1^2+(-1)^{6k+1}\equiv 1+(-1)\equiv 0 \pmod 3$，

此時 r 是 3 的倍數，就不可能是大於 8 的奇質數。

若 $p=6k+5$，其中 k 是非負整數，

則 $r=(6k+5)^2+2^{6k+5}\equiv 2^2+(-1)^{6k+5}\equiv 4+(-1)\equiv 3\equiv 0 \pmod 3$，

此時 r 是 3 的倍數，就不可能是大於 8 的奇質數。

故 p 只能是 $6k+3$ 型式的奇數，

但 $6k+3$ 必為 3 的倍數，而 p 又必須是質數，所以必有 $p=3$。

此時 $r=p^2+2^p=3^2+2^3=17\Rightarrow(p,q,r)=(3,2,17)$。

同理，若 p 是偶數、q 是奇數，則必有 $(p,q,r)=(2,3,17)$。

2-6 綠園中有一長廊，長度 1000 公尺。長廊上有 n 盞路燈，每盞路燈都恰好照亮了 1 公尺長的廊道（這 1 公尺的範圍是連續的），而這 n 盞路燈可以照亮整條長廊。但小綠發現，如果關閉任意 1 盞路燈，那麼長廊一定會有某個地方沒有被照亮。請問 n 的最大可能值為何？

答：1998。

解：

假設長廊以數線上的閉區間 $[0,1000]$ 表示，

而這 n 盞路燈照亮的範圍由左至右依序是 $I_k=[a_k,a_k+1]$，其中 $k=1,2,\cdots\cdots,n$，且 $a_1=0$、$a_n=999$。

因為這 n 盞路燈可以照亮整條長廊，所以 $a_{k+1}\le a_k+1$，其中 $k=1,2,\cdots\cdots,n-1$。

又因為「如果關閉任意 1 盞路燈，那麼長廊一定會有某個地方沒有被照亮」，所以 $a_k+1<a_{k+2}$，其中 $k=1,2,\cdots\cdots,n-2$。

於是我們可以得到 $a_1+1<a_3$、$a_3+1<a_5$、$a_5+1<a_7$、$\cdots\cdots$

若 $n\ge 1999$，

則 $a_3>a_1+1=0+1=1$、$a_5>a_3+1>2$、、$\cdots\cdots$、$a_{1999}>a_{1997}+1>999$，

這與 $a_n=999$ 矛盾，所以 $n\le 1998$。

而考慮 $a_{2m-1}=\dfrac{1001}{1000}(m-1)$、$a_{2m}=\dfrac{1001}{1000}m-\dfrac{999}{1000}$ 的情形，

即 $I_1=[a_1,a_1+1]=[0\ ,\ 1]$；$I_2=[a_2,a_2+1]=[0.002\ ,\ 1.002]$；

$I_3=[a_3,a_3+1]=[1.001\ ,\ 2.001]$；$I_4=[a_4,a_4+1]=[1.003\ ,\ 2.003]$；

$I_5=[a_5,a_5+1]=[2.002\ ,\ 3.002]$；$I_6=[a_6,a_6+1]=[2.004\ ,\ 3.004]$；

$\vdots$ $\vdots$

$I_{1997}=[a_{1997},a_{1997}+1]=[998.998\ ,\ 999.998]$；$I_{1998}=[a_{1998},a_{1998}+1]=[999,1000]$。

顯然，這 1998 盞路燈可以照亮整條長廊。

若關閉第 1 盞或第 1998 盞路燈，則長廊有某個地方沒有被照亮。

若是關閉第 k 盞路燈，其中 $k=2,3,4,\cdots\cdots,1997$，

則因為 I_{k-1} 的右端點坐標 $<$ I_{k+1} 的左端點坐標，

所以長廊也會有某個地方沒有被照亮。

所以這 1998 盞路燈的設置可以滿足題意，故 n 的最大可能值為 1998。