北一女中 106 學年度上學期《數戰數決》有獎徵答活動

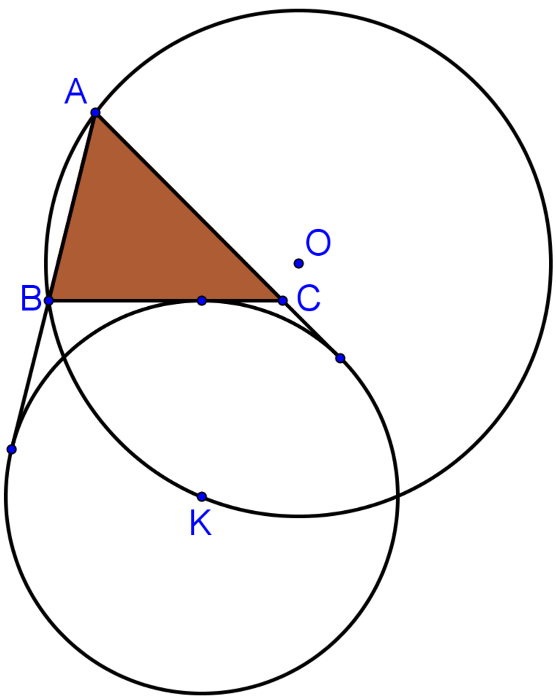
第一期題目：

2017 年 10 月 05 日下午 1 點鐘截止

1-1 對於一列數，將之「1 輪變換」的定義為：將「任意連續兩數中，右邊的數減去左邊的數得到的差」插入兩數之間，之後會得到新的一列數。
例如：$3,1,4$ 經過 1 輪變換後會變成 $3,\underline{-2},1,\underline{3},4$，其中畫了底線的數就是插入的數，再經過 1 輪變換後則會變成 $3,\underline{-5},-2,\underline{3},1,\underline{2},3,\underline{1},4$。
現在小綠將 $2,0,1,7$ 執行了 2017 輪變換後得到一列數，則這些數的總和是多少？

1-2 小綠手上有 53 張牌，每張牌上都寫著一個正整數。已知這 53 張牌上的數都不相同，而且其總和不超過 2017，請證明：小綠手上一定有兩張牌，上面的數的總和是 53。

1-3 如下圖，$\triangle ABC$ 的其中一個旁切圓與 $\overline{BC}$、射線 AB、射線 AC 相切。
假設此旁切圓的圓心為 K，再取$\triangle ABK$ 的外心為 O。
請證明：(1) K、C、O 三點共線。
(2) A、B、C、O 四點共圓。



1-4 小綠將 6 個連續正整數分成 A、B、C 三組，每組恰好 2 個數。
令 A 組兩數乘積為 a；B 組兩數乘積為 b；C 組兩數乘積為 c，
此時小綠發現恰好有 $a+b=c$ 。
請問這 6 個連續正整數為何？小綠將這 6 個數分組的方式為何？

1-5 試求所有滿足 $m^3+n^3=m^2+6mn+n^2$ 的正整數數對 (m,n) 。

1-6 如下方圖示，平面上有$\triangle ABC$。已知 Q、R 都在 $\overline{BC}$ 上，P 在 $\overline{AB}$ 上，且 P、Q、R 恰好三等分$\triangle ABC$ 的周長。請證明：$\dfrac{\triangle PQR\text{的面積}}{\triangle ABC\text{的面積}}>\dfrac{2}{9}$ 。