北一女中 106 學年度上學期《數戰數決》有獎徵答活動

第一期解答：

1-1 對於一列數，將之「1 輪變換」的定義為：將「任意連續兩數中，右邊的數減去左邊的數得到的差」插入兩數之間，之後會得到新的一列數。

例如：$3,1,4$ 經過 1 輪變換後會變成 $3,\underline{-2},1,\underline{3},4$，其中畫了底線的數就是插入的數，再經過 1 輪變換後則會變成 $3,\underline{-5},-2,\underline{3},1,\underline{2},3,\underline{1},4$。

現在小綠將 $2,0,1,7$ 執行了 2017 輪變換後得到一列數，則這些數的總和是多少？

答：10095

解：

對於一列數 $a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n$ 執行 1 輪變換後，

會得到新的一列數為 $a_1,a_2-a_1,a_2,a_3-a_2,a_3,\cdots\cdots a_{n-1},a_n-a_{n-1},a_n$。

新的一列數之總和為 $a_1+(a_2-a_1)+a_2+(a_3-a_2)+a_3+\cdots\cdots+a_{n-1}+(a_n-a_{n-1})+a_n$

$$=(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)+[(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots\cdots+(a_n-a_{n-1})]$$

$$=(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)+(a_n-a_1)\text{，}$$

比原來那一列數的總和還多了 (a_n-a_1)，但新的一列數的首項與末項均不變。

所以小綠將 $2,0,1,7$ 每執行 1 輪變換後，

得到了新的一列數的總和都會增加 5（因為首項與末項均不變），

故執行了 2017 輪變換後得到的一列數，

其總和為 $(2+0+1+7)+5\times2017=10095$。

1-2 小綠手上有 53 張牌，每張牌上都寫著一個正整數。已知這 53 張牌上的數都不相同，而且其總和不超過 2017，請證明：小綠手上一定有兩張牌，上面的數的總和是 53。

解：

假設小綠手上任兩張牌上的數的總和都不是 53。

考慮 k 號牌與 $53-k$ 號牌（$k=1,2,3,\cdots\cdots,26$），小綠至多只能有其中一張。

所以小綠手上的 53 張牌裡，一定有 27 張牌的數不在 1～52 之間。

於是小綠手上所有牌的數的總和

$$\geq(1+2+3+\cdots\cdots+26)+(53+54+55+\cdots\cdots+79)$$

$$=\frac{(1+26)\times26}{2}+\frac{(53+79)\times27}{2}=351+1782=2133>2017\text{，矛盾。}$$

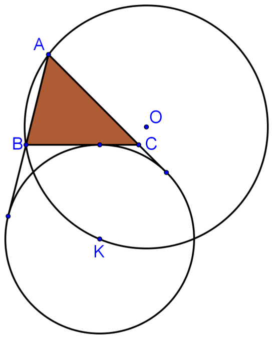
故小綠手上一定有兩張牌，上面的數的總和是 53。證畢。

1-3 如下圖，$\triangle ABC$ 的其中一個旁切圓與 $\overline{BC}$ 、射線 AB、射線 AC 相切。

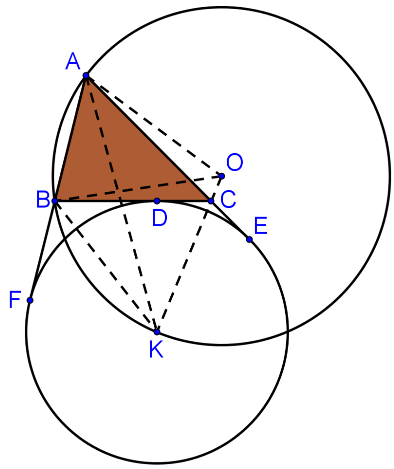
假設此旁切圓的圓心為 K，再取$\triangle ABK$ 的外心為 O。

請證明：(1) K、C、O 三點共線。

(2) A、B、C、O 四點共圓。



解：



如右圖，令旁切圓分別與 $\overline{BC}$ 、射線 AB、射線 AC 相切於點 D、F、E；連接 $\overline{OA},\overline{OB},\overline{OK},\overline{AK},\overline{BK}$ 。

因為旁切圓與 $\overline{BC}$ 、射線 AB、射線 AC 均相切，

所以 $\overline{KA},\overline{KB},\overline{KC}$ 分別平分 $\angle BAC,\angle FBD,\angle DCE$ 。

(1) $\angle BKC=180^\circ-\angle KBC-\angle KCB=180^\circ-\dfrac{1}{2}\angle FBD-\dfrac{1}{2}\angle DCE$

$=180^\circ-\dfrac{1}{2}(180^\circ-\angle B)-\dfrac{1}{2}(180^\circ-\angle C)=\dfrac{1}{2}(\angle B+\angle C)$ 。

$\angle BKO=\dfrac{1}{2}(180^\circ-\angle BOK)$（因為 $\overline{OB}=\overline{OK}$ ）

$=\dfrac{1}{2}(180^\circ-\overset{\frown}{BK})=90^\circ-\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{BK}=90^\circ-\angle BAK$

$=90^\circ-\dfrac{1}{2}\angle BAC=\dfrac{1}{2}(180^\circ-\angle BAC)=\dfrac{1}{2}(\angle B+\angle C)$ 。

所以 $\angle BKC=\angle BKO$ ，故 K、C、O 三點共線。

(2) 由(1)可知 $\angle AOC=\angle AOK=\overset{\frown}{ABK}=\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BK}=2\angle AKB+2\angle BAK$

$=2(\angle AKB+\angle BAK)=2\angle FBK=\angle FBD$ ，

故 $\angle AOC+\angle ABC=\angle FBD+\angle ABC=180^\circ\Rightarrow$ A、B、C、O 四點共圓。

1-4 小綠將 6 個連續正整數分成 A、B、C 三組，每組恰好 2 個數。

令 A 組兩數乘積為 a；B 組兩數乘積為 b；C 組兩數乘積為 c，

此時小綠發現恰好有 $a+b=c$。

請問這 6 個連續正整數為何？小綠將這 6 個數分組的方式為何？

答：$A=\{6,9\},B=\{7,8\},C=\{10,11\}$ 或 $A=\{1,2\},B=\{3,6\},C=\{4,5\}$

或 $A=\{2,5\},B=\{3,6\},C=\{4,7\}$；或以上三組解的 A 與 B 兩組數對調。

解：

假設 6 個連續正整數為 $n,n+1,n+2,n+3,n+4,n+5$。

因為 n～$n+5$ 中必恰好為 3 奇數 3 偶數，所以 a,b,c 中至少有 2 個偶數。

但 $a+b=c$，所以 a,b,c 不可能是 1 奇數 2 偶數，所以 a,b,c 全部都是偶數。

故 A、B、C 三組都恰含 1 奇數 1 偶數。

Case 1. 假設 C 組兩數中的較大數為 $n+5$，則另一數只能是 $n+4$ 或 $n+2$ 或 n。

Case 1-1. 假設 C 組兩數為 $n+4,n+5 \Rightarrow c=(n+4)(n+5)=n^2+9n+20$。

$a+b=n(n+1)+(n+2)(n+3)$ 或 $n(n+2)+(n+1)(n+3)$ 或 $n(n+3)+(n+1)(n+2)$

$=2n^2+6n+6$ 或 $2n^2+6n+3$ 或 $2n^2+6n+2$，

於是 $0=a+b-c=n^2-3n-14$ 或 $n^2-3n-17$ 或 $n^2-3n-18$，

其中只有 $n^2-3n-18=0$ 有正整數解 $n=6$，

此時 C 組兩數為 10,11，且其他兩組為 6,9 與 7,8。

Case 1-2. 假設 C 組兩數為 $n+2,n+5 \Rightarrow c=(n+2)(n+5)=n^2+7n+10$。

$a+b=n(n+1)+(n+3)(n+4)$ 或 $n(n+3)+(n+1)(n+4)$ 或 $n(n+4)+(n+1)(n+3)$

$=2n^2+8n+12$ 或 $2n^2+8n+4$ 或 $2n^2+8n+3$，

於是 $0=a+b-c=n^2+n+2$ 或 n^2+n-6 或 n^2+n-7，

其中只有 $n^2+n-6=0$ 有正整數解 $n=2$，

此時 C 組兩數為 4,7，且其他兩組為 2,5 與 3,6。

Case 1-3. 假設 C 組兩數為 $n,n+5 \Rightarrow c=n(n+5)=n^2+5n$。

則 $a+b>(n+4)(n+1)=n^2+5n+4>n^2+5n>c$，矛盾。

Case 2.　假設 C 組兩數中的較大數為 $n+4$，則另一數只能是 $n+3$ 或 $n+1$。

Case 2-1. 假設 C 組兩數為 $n+3, n+4 \Rightarrow c=(n+3)(n+4)=n^2+7n+12$。

$a+b=n(n+1)+(n+2)(n+5)$ 或 $n(n+2)+(n+1)(n+5)$ 或 $n(n+5)+(n+1)(n+2)$

$=2n^2+8n+10$ 或 $2n^2+8n+5$ 或 $2n^2+8n+2$，

於是 $0=a+b-c=n^2+n-2$ 或 n^2+n-7 或 n^2+n-10，

其中只有 $n^2+n-2=0$ 有正整數解 $n=1$，

此時 C 組兩數為 4,5，且其他兩組為 1,2 與 3,6。

Case 2-2. 假設 C 組兩數為 $n+1, n+4 \Rightarrow c=(n+1)(n+4)=n^2+5n+4$。

$a+b=n(n+2)+(n+3)(n+5)$ 或 $n(n+3)+(n+2)(n+5)$ 或 $n(n+5)+(n+2)(n+3)$

$=2n^2+10n+15$ 或 $2n^2+10n+10$ 或 $2n^2+10n+6$，

上述之 $a+b$ 均明顯大於 c，矛盾。

Case 3.　假設 C 組兩數中的較大數為 $n+3$，則另一數只能是 $n+2$ 或 n。

此時 $c \le (n+2)(n+3)=n^2+5n+6$。

若 $n+5$ 與 $n+4$ 在同一組，

則 $a+b \ge (n+4)(n+5)+n(n+1)=2n^2+10n+20>n^2+5n+6=c$，矛盾。

若 $n+5$ 與 $n+2$ 在同一組，

則 $a+b \ge (n+2)(n+5)+n(n+4)=2n^2+11n+10>n^2+5n+6=c$，矛盾。

若 $n+5$ 與 n 在同一組，

則 $a+b \ge n(n+5)+(n+1)(n+4)=2n^2+5n+(5n+4)>n^2+5n+6=c$，矛盾。

綜合以上所述，滿足題意的解共有 6 組：

$A=\{6,9\}, B=\{7,8\}, C=\{10,11\}$ 或 $A=\{1,2\}, B=\{3,6\}, C=\{4,5\}$

或 $A=\{2,5\}, B=\{3,6\}, C=\{4,7\}$：或以上三組解的 A 與 B 兩組數對調。

1-5 試求所有滿足$m^3+n^3=m^2+6mn+n^2$的正整數數對(m,n)。

答：$(1,3),(3,1),(4,4)$

解：

$$m^3+n^3=m^2+6mn+n^2 \Rightarrow (m+n)(m^2-mn+n^2)=(m+n)^2+4mn$$

$$\Rightarrow m^2-mn+n^2=(m+n)+\frac{4mn}{m+n}\text{。}$$

不妨設$m\ge n$，則$\dfrac{4mn}{m+n}\le\dfrac{2m^2+2mn}{m+n}=2m$，

所以$m^2-mn+n^2=(m+n)+\dfrac{4mn}{m+n}\le(m+n)+2m=3m+n$

$\Rightarrow m^2-mn+n^2-3m-n\le 0$（★）

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}(m-n)^2+\dfrac{1}{2}(m-3)^2+\dfrac{1}{2}(n-1)^2\le 5$

$\Rightarrow (m-n)^2+(m-3)^2+(n-1)^2\le 10$。

由此可知$(n-1)^2\le 10\Rightarrow n-1\le 3\Rightarrow n\le 4$。

若$n=1$，則（★）為$m^2-4m\le 0\Rightarrow m(m-4)\le 0\Rightarrow 0\le m\le 4$。

將$(m,n)=(1,1),(2,1),(3,1),(4,1)$分別代入題目原方程式後可知只有$(3,1)$為解。

若$n=2$，則（★）為$m^2-5m+2\le 0\Rightarrow m(m-5)\le -2<0\Rightarrow 0<m<5$。

將$(m,n)=(2,2),(3,2),(4,2)$分別代入題目原方程式後可知均不為解。

若$n=3$，則（★）為$m^2-6m+6\le 0\Rightarrow (m-1)(m-5)\le -1<0\Rightarrow 1<m<5$。

將$(m,n)=(4,3)$代入題目原方程式後可知$(4,3)$不為解。

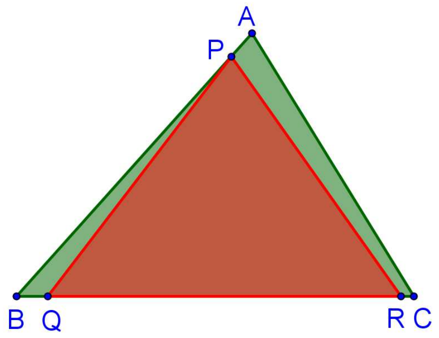
若$n=4$，則（★）為$m^2-7m+12\le 0\Rightarrow (m-3)(m-4)\le 0\Rightarrow 3\le m\le 4$。

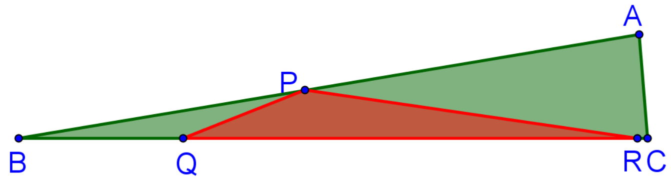
將$(m,n)=(4,4)$代入題目原方程式後可知$(4,4)$為解。

同理可知，當$m\le n$時，亦有$(1,3)$、$(4,4)$為解。

故綜合以上所述，題目所求之方程式的解為$(1,3),(3,1),(4,4)$。

1-6 如下方圖示，平面上有$\triangle ABC$。已知 Q、R 都在 $\overline{BC}$ 上，P 在 $\overline{AB}$ 上，且 P、Q、R 恰好三等分$\triangle ABC$ 的周長。請證明：$\dfrac{\triangle PQR\text{的面積}}{\triangle ABC\text{的面積}} > \dfrac{2}{9}$ 。





解：

假設 $\overline{BC}=a$ 、$\overline{CA}=b$ 、$\overline{AB}=c$ ，且 $\overline{QR}=t=\dfrac{1}{3}\triangle ABC$ 的周長$=\dfrac{1}{3}(a+b+c)$ 。

因為 $\overline{BC}>\overline{QR}$ ，所以 $a>t=\dfrac{1}{3}(a+b+c)\Rightarrow 2a>b+c$ 。

再假設 $\overline{BP}=x$ 、$\overline{RC}=y$ ，則 $\overline{BQ}=t-x$ 、$\overline{RC}+\overline{CA}+\overline{AP}=y+b+(c-x)=t$ 。

又假設$\triangle ABC$ 中過 A 點的高為 h_a 、$\triangle PQR$ 中過 P 點的高為 h_p ，

則 $h_p:h_a=\overline{BP}:\overline{BA}=x:c$ 。

於是 $\dfrac{\triangle PQR\text{的面積}}{\triangle ABC\text{的面積}}=\dfrac{\frac{1}{2}\times\overline{QR}\times h_p}{\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times h_a}=\dfrac{t}{a}\times\dfrac{x}{c}=\dfrac{t\cdot(b+c+y-t)}{ac}>\dfrac{t\cdot(b+c-t)}{ac}$

【思考方向：當 y 越小時，P 越接近 B，則 h_p 就越小，整個比值就越小。】

$=\dfrac{(a+b+c)\cdot(2b+2c-a)}{9ac}>\dfrac{(a+b+c)\cdot(2b+2c-a)}{9a(b+c)}$

$=\dfrac{(a+s)\cdot(2s-a)}{9as}$ （令 $b+c=s$ ，則 $s-a=b+c-a>0$ 。）

$=\dfrac{2s^2+as-a^2}{9as}=\dfrac{(2s^2-as-a^2)+2as}{9as}=\dfrac{(s-a)(2s+a)}{9as}+\dfrac{2}{9}>0+\dfrac{2}{9}=\dfrac{2}{9}$ ，證畢。