北一女中 104 學年度下學期《數戰數決》有獎徵答活動

第六期解答：

6-1 若方程式 $x^2+ax+(b+1)=0$ 的兩根均為正整數，請證明 a^2+b^2 不是質數。
解：

假設方程式的兩根為 m,n，由根與係數可知 $\begin{cases} m+n=-a \\ mn=b+1 \end{cases}$。

所以 $a^2+b^2=(-a)^2+b^2$

$$=(m+n)^2+(mn-1)^2=(m^2+2mn+n^2)+(m^2n^2-2mn+1)$$

$$=m^2n^2+m^2+n^2+1=(m^2+1)(n^2+1)\text{。}$$

因為 m,n 都是正整數，所以 $(m^2+1),(n^2+1)$ 均大於 1，故 a^2+b^2 不是質數。

6-2 請找出最大的正整數 n，使得 2^n 整除 $5^{(2^{2016})}-1$。

答：2018。

解：

因為 $5^{2a}-1=(5^a-1)(5^a+1)$，

所以 $5^{(2^{2016})}-1=\left(5^{(2^{2015})}-1\right)\left(5^{(2^{2015})}+1\right)$

$$=\left(5^{(2^{2014})}-1\right)\left(5^{(2^{2014})}+1\right)\left(5^{(2^{2015})}+1\right)$$

$$\vdots$$

$$=\left(5^{(2^1)}-1\right)\left(5^{(2^1)}+1\right)\left(5^{(2^2)}+1\right)\cdots\cdots\left(5^{(2^{2014})}+1\right)\left(5^{(2^{2015})}+1\right)\text{。}$$

又對於正整數 k 而言，$5^{2k}+1=(4+1)^{2k}+1=(\sum_{i=0}^{2k}C_i^{2k}\cdot 4^i)+1$

$$=(\sum_{i=1}^{2k}C_i^{2k}\cdot 4^i)+2=4A+2$$，其中 A 為正整數。

故 $\left(5^{(2^1)}+1\right),\left(5^{(2^2)}+1\right),\cdots\cdots,\left(5^{(2^{2014})}+1\right),\left(5^{(2^{2015})}+1\right)$ 都是 2 的倍數，且非 4 的倍數。

而 $\left(5^{(2^1)}-1\right)=24=2^3\times 3$，所以題目所求的 n 值為 $3+2015=2018$。

6-3 對於正整數 n，定義 $d(n)=$「n 的各位數字和」，例如 $d(613)=6+1+3=10$。

現在考慮所有的三位正整數 n（即 100～999），請問哪一個數會使得 $\dfrac{d(n)}{n}$ 的值最大？

答：199。

解：

假設 $n=10a+9$、$k=10a+b$，其中 $a\in\{10,11,\cdots,99\}$、$b\in\{0,1,2,\cdots,8\}$，

則 $\dfrac{d(n)}{n}-\dfrac{d(k)}{k}=\dfrac{d(a)+9}{10a+9}-\dfrac{d(a)+b}{10a+b}=\dfrac{b\cdot d(a)+90a-9\cdot d(a)-10ab}{(10a+9)(10a+b)}$

$=\dfrac{(9-b)[10a-d(a)]}{(10a+9)(10a+b)}>0$（因為 $b<9$ 且 $d(a)\le 9+9=18<100\le 10a$），

所以題目欲求之 n 值的個位數字必為 9。

假設 $n=100c+99$、$k=100c+10m+9$，其中 $c\in\{1,2,\cdots,9\}$、$m\in\{0,1,2,\cdots,8\}$，

則 $\dfrac{d(n)}{n}-\dfrac{d(k)}{k}=\dfrac{c+9+9}{100c+99}-\dfrac{c+m+9}{100c+10m+9}=\dfrac{810c-729-90cm+81m}{(100c+99)(100c+m)}$

$=\dfrac{(9-m)(90c-81)}{(10a+9)(10a+b)}>0$（因為 $m<9$ 且 $90c\ge 90>81$），

所以題目欲求之 n 值的十位數字也必為 9。

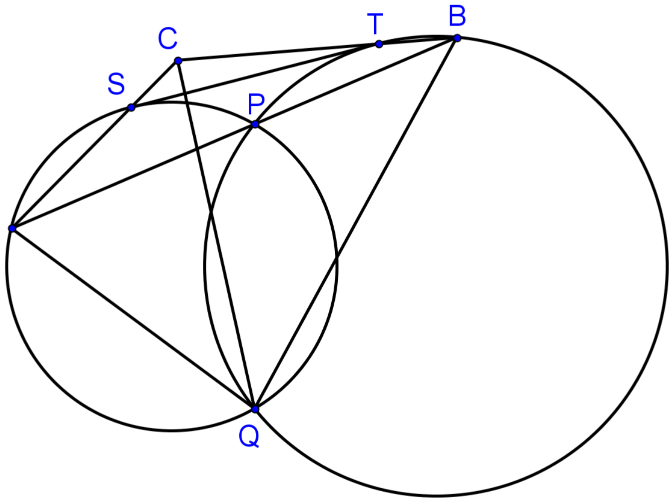
假設 $n=199$、$k=100h+99$，其中 $h\in\{2,3,\cdots,9\}$，

則 $\dfrac{d(n)}{n}-\dfrac{d(k)}{k}=\dfrac{1+9+9}{199}-\dfrac{h+9+9}{100h+99}=\dfrac{1701(h-1)}{199(100h+99)}>0$（因為 $h>1$），

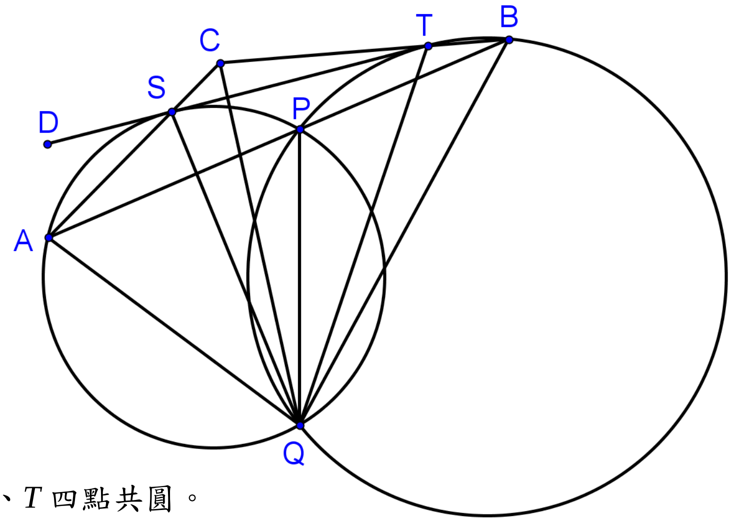
所以題目欲求之 n 值的十位數字必為 1。

綜合以上可知題目欲求之 n 值為 199。

6-4 如右圖，已知兩圓交於 P、Q 兩點，
且直線 ST 為其外公切線，
其中 S、T 為切點。過點 P 作一直線
分別交兩圓於點 A、B，
連接直線 AS、直線 BT，
設此兩直線交於點 C，連接 $\overline{CQ}$ 。
請證明：$\angle CQA = \angle CQB$ 。



解：
如右圖，延長射線 TS 至任一點 D，
並連接 $\overline{QS}, \overline{QP}, \overline{QT}$ 。



因為 A、S、P、Q 四點共圓，
所以 $\angle PQS = \frac{1}{2}\overset{\frown}{PS} = \angle PAS$ 。
同理可證得 $\angle PQT = \angle PBT$ 。
於是 $\angle SCT + \angle SQT$
$= \angle SCT + \angle PQS + \angle PQT$
$= \angle ACB + \angle PAS + \angle PBT = 180^\circ$
（$\triangle ABC$ 的內角和），故 C、S、Q、T 四點共圓。

$\angle CQA = \angle CQS + \angle SQA = \angle CTS + \frac{1}{2}\overset{\frown}{SA}$（因為 C、S、Q、T 四點共圓）
$= \angle CTS + \angle DSA$（弦切角）
$= \angle CTS + \angle CST = 180^\circ - \angle SCT$ 。
同理亦可證得 $\angle CQB = 180^\circ - \angle SCT$ ，
故 $\angle CQA = 180^\circ - \angle SCT = \angle CQB$ ，證畢。

6-5　請找出滿足$\begin{cases} x-yz=11 \\ xz+y=13 \end{cases}$的所有三元序對$(x,y,z)$，其中 x、y、z 均為整數。

答：$(11,13,0)$、$(12,1,1)$、$(-1,12,-1)$、$(-3,7,-2)$、$(5,-2,3)$、$(-1,1,-12)$。

解：

$$(x-yz)^2+(xz+y)^2=11^2+13^2 \Rightarrow (x^2-2xyz+y^2z^2)+(x^2z^2+2xyz+y^2)=290$$
$$\Rightarrow (x^2+y^2)+(x^2z^2+y^2z^2)=290。$$
$$\Rightarrow (x^2+y^2)(1+z^2)=290。$$

所以$1+z^2$為$290=2\times5\times29$的正因數$1,2,5,10,29,58,145,290$，

故 z 的可能值為$0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm12,\pm17$（$1+z^2=29,58$無整數解）。

再將$\begin{cases} x-yz=11 \\ xz+y=13 \end{cases}$視為$x,y$的二元一次方程組，可解得$\begin{cases} x=\dfrac{11+13z}{1+z^2} \\ y=\dfrac{13-11z}{1+z^2} \end{cases}$。

將所有 z 的可能值代入檢驗如下方表格：

z	0	1	-1	2	-2	3	-3	12	-12	17	-17
$x=\dfrac{11+13z}{1+z^2}$	11	12	-1	$\dfrac{37}{5}$	-3	5	$-\dfrac{14}{5}$	$\dfrac{167}{145}$	-1	$\dfrac{4}{5}$	$-\dfrac{21}{29}$
$y=\dfrac{13-11z}{1+z^2}$	13	1	12	$-\dfrac{9}{5}$	7	-2	$\dfrac{23}{5}$	$-\dfrac{119}{145}$	1	$-\dfrac{3}{5}$	$\dfrac{20}{29}$

故(x,y,z)共有 6 組解：

$(11,13,0)$、$(12,1,1)$、$(-1,12,-1)$、$(-3,7,-2)$、$(5,-2,3)$、$(-1,1,-12)$。

6-6 假設在一圓周上依序有 16 個點 $P_1, P_2, P_3, \cdots\cdots, P_{16}$。現在小綠想要以這 16 個點為端點，連接出兩兩不相交的 8 條弦，請問小綠有幾種不同的方法？

答：1430。

解：

假設在一圓周上依序有 $2n$ 個點，以這些點為端點，連接出兩兩不相交的 n 條弦的方法數為 A_n，則題目所求之方法數即為 A_8。

當 $n=0$ 時，顯然 $A_0=1$；當 $n=1$ 時，顯然 $A_1=1$。
假設我們已經知道 $A_0, A_1, A_2, \cdots\cdots, A_{n-1}$ 的值，
考慮點 P_1，必定只能跟 $P_2, P_4, P_6 \cdots, P_{2n}$ 連接。

若 P_1 與 P_{2m} 連接，則 $\overline{P_1P_{2m}}$ 兩邊各有 $2m-2$ 個點與 $2n-2m$ 個點，

在連接 $2m-2$ 個點時，可視為一圓周上有 $2m-2$ 個點的連接方法數 A_{m-1}；
在連接 $2n-2m$ 個點時，可視為一圓周上有 $2n-2m$ 個點的連接方法數 A_{n-m}；
故當 P_1 與 P_{2m} 連接，則再連接完其他點的方法數為 $A_{2m-2} \times A_{2n-2m}$，

於是 $A_n = \sum_{m=1}^{n} (A_{m-1} \times A_{n-m})$。

所以 $A_2 = A_0 \times A_1 + A_1 \times A_0 = 1\times1+1\times1=2$；

$A_3 = A_0 \times A_2 + A_1 \times A_1 + A_2 \times A_0 = 1\times2+1\times1+2\times1=5$；

$A_4 = A_0 \times A_3 + A_1 \times A_2 + A_2 \times A_1 + A_3 \times A_0 = 1\times5+1\times2+2\times1+5\times1=14$；

$A_5 = A_0 \times A_4 + A_1 \times A_3 + \cdots\cdots + A_4 \times A_0 = 1\times14+1\times5+2\times2+5\times1+14\times1=42$；

$A_6 = A_0 \times A_5 + A_1 \times A_4 + \cdots\cdots + A_5 \times A_0$
$= 1\times42+1\times14+2\times5+5\times2+14\times1+42\times1=132$；

$A_7 = A_0 \times A_6 + A_1 \times A_5 + \cdots\cdots + A_6 \times A_0$
$= 1\times132+1\times42+2\times14+5\times5+14\times2+42\times1+132\times1=429$；

$A_8 = A_0 \times A_7 + A_1 \times A_6 + \cdots\cdots + A_7 \times A_0$
$= 1\times429+1\times132+2\times42+5\times14+14\times5+42\times2+132\times1+429\times1=1430$。

題目所求之方法數即為 $A_8 = 1430$。

【註】解答裡的 A_n 是組合學中著名的 *Catalan number*，其計算公式為 $\frac{1}{n+1}C_n^{2n}$。