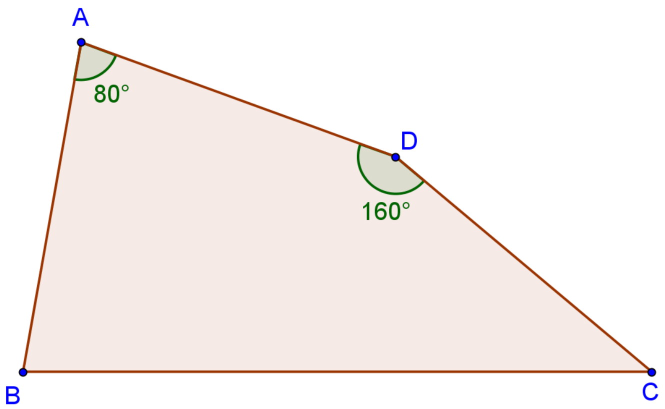
北一女中 104 學年度下學期《數戰數決》有獎徵答活動

第五期題目：

2016 年 04 月 29 日下午 1 點鐘截止



5-1 如右圖。四邊形 $ABCD$ 中，

已知 $\overline{BA}=\overline{AD}=\overline{DC}$ ，

且 $\angle A=80°$ 、 $\angle D=160°$ ，

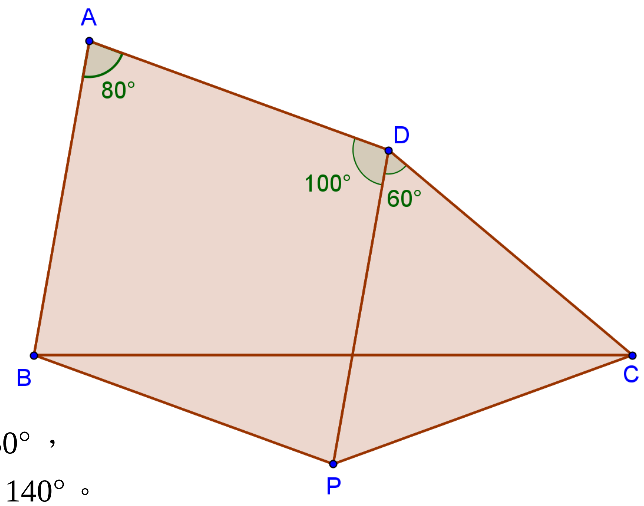
試求 $\angle B$ 的大小（度數）。

答： $\angle B=80°$ 。

解：

如右圖，

取點 P 使得 $ABPD$ 為平行四邊形。



因為 $\overline{BA}=\overline{AD}$ ，

所以 $ABPD$ 為菱形 $\Rightarrow \overline{PD}=\overline{AD}=\overline{DC}$ ，

且 $\angle ADP=180°-\angle A=100°$

$\Rightarrow \angle PDC=160°-100°=60°$ ，

故 $\triangle PDC$ 為正三角形。

於是 $\angle DPC=60°$ 。

又因為 $ABPD$ 為菱形 $\Rightarrow \angle DPB=\angle A=80°$ ，

故 $\angle BPC=\angle CPD+\angle DPC=60°+80°=140°$ 。

因為 $\triangle PDC$ 為正三角形、$ABPD$ 為菱形 $\Rightarrow \overline{PC}=\overline{CD}=\overline{AD}=\overline{PB}$ ，

所以 $\angle PBC=\dfrac{1}{2}(180°-\angle BPC)=20°$ ，

故 $\angle ABC=\angle ABP-\angle PBC=\angle ADP-\angle PBC=100°-20°=80°$ 。

5-2 請證明：對於所有的正整數 k，都存在正整數 N，使得 N 是 2^k 的倍數，且 N 的每一位數字都是 1 或 2。

解：

1° 當 $k=1$ 時，取 $N(1)=2$ 即為滿足題意的 N，而這樣的 N 是一位數。

2° 設當 $k=m$（$m\in\mathbb{N}$）時，存在正整數 $N(m)=2^m\cdot c_m$，且 $N(m)$ 是 m 位數，

並滿足 $N(m)$ 是 2^m 的倍數（即 $c_m\in\mathbb{N}$），且 $N(m)$ 的每一位數字都是 1 或 2。

則當 $k=m+1$ 時：

若 c_m 為奇數，則取 $N(m+1)=10^m+N(m)$，意即在 $N(m)$ 左端添加「1」，

則 $N(m+1)$ 是 $m+1$ 位數，且每一位數字都是 1 或 2，

又 $N(m+1)=10^m+2^m\cdot c_m=2^{m+1}\times\dfrac{5^m+c_m}{2}$ 是 2^{m+1} 位數，滿足題目要求。

若 c_m 為偶數，則取 $N(m+1)=2\cdot 10^m+N(m)$，意即在 $N(m)$ 左端添加「2」，

則 $N(m+1)$ 是 $m+1$ 位數，且每一位數字都是 1 或 2，

又 $N(m+1)=2\cdot 10^m+2^m\cdot c_m=2^{m+1}\times(5^m+\dfrac{c_m}{2})$ 是 2^{m+1} 位數，滿足題目要求。

綜合1°、2°以及數學歸納法原理可知題目所述命題為真。

5-3 小綠將 2016 個小石頭分成 5 堆，每堆小石頭都不超過 672 個。現在小綠每天都從 3 堆小石頭中各拿走 1 個，請證明：不論小綠一開始怎麼分堆，他總是可以恰好在第 672 天將小石頭一個不剩地拿光。

解：

假設小綠採取每天都從石頭數最多的 3 堆中各拿走 1 個的方法，

（若有 4 堆以上的石頭數相同且最多，則任選 3 堆。）

以下證明這種方法一定可以將小石頭拿光。

因為小綠每天總共拿走 3 個小石頭，所以每天剩下的石頭總數必為 3 的倍數。

現在假設第 $n+1$ 天小綠已經無法拿取石頭，那麼一定是只剩 2 堆或 1 堆石頭。

所以可不妨假設 5 堆石頭為 A 堆、B 堆、C 堆、D 堆、E 堆，

其剩餘的石頭數量分別為 $a,b,0,0,0$，其中 $a \geq b$。

因為 $a+b$ 是 3 的倍數，所以 $a \geq 2$。

又，小綠已經拿了 n 天，所以 $a+b=2016-3n$，其中 $n<672$。

因為第 n 天小綠拿完石頭後，有 3 堆石頭的數量比 A 堆少了 2 以上，

所以他在第 n 天一定有從 A 堆拿了石頭，

故可知在第 $n-1$ 天拿完石頭後，還是有 3 堆石頭的數量比 A 堆少了 2 以上。

同理可遞推小綠從第 1 天到第 n 天都從 A 堆拿了石頭，

所以一開始 A 堆的石頭數為 $a+n$，

而 $a+n \geq \dfrac{a+b}{2}+n=\dfrac{2016-3n}{2}+n=1008-\dfrac{n}{2}>1008-\dfrac{672}{2}=672$，矛盾。

所以小綠採取前述策略，必定可以拿光小石頭。

5-4 試找出所有的正整數數對 (a,b)，使得 $\dfrac{a^3+b}{ab}$ 也是正整數。

答：$(a,b)=(1,1)$ 或 $(2,8)$。

解：

若 $b=1$，則 $\dfrac{a^3+b}{ab}=a^2+\dfrac{1}{a}$ 為正整數，則必有 $a=1$，此時 $\dfrac{a^3+b}{ab}=2$ 滿足題意。

若 $b\ge 2$，假設 p 為 b 的質因數，則因為 $b\,|\,(a^3+b)$，所以 $p\,|\,(a^3+b)$。

又因為 $p\,|\,b$，所以 $p\,|\,a^3 \Rightarrow p\,|\,a$。

假設 $a=p^{\alpha}\cdot x$ 且 $b=p^{\beta}\cdot y$，其中 $\alpha,\beta,x,y\in\mathbb{N}$ 且 x,y 都不是 p 的倍數。

此時 $\dfrac{a^3+b}{ab}=\dfrac{p^{3\alpha}\cdot x^3+p^{\beta}\cdot y}{p^{\alpha+\beta}\cdot xy}$

因為 $p^{\alpha+\beta}\,|\,(p^{3\alpha}\cdot x^3+p^{\beta}\cdot y)\Rightarrow p^{\beta}\,|\,(p^{3\alpha}\cdot x^3+p^{\beta}\cdot y)\Rightarrow p^{\beta}\,|\,(p^{3\alpha}\cdot x^3)$，

所以 $\beta\le 3\alpha$，故 $\dfrac{a^3+b}{ab}=\dfrac{p^{3\alpha-\beta}\cdot x^3+y}{p^{\alpha}\cdot xy}$。

又 $p^{\alpha}\,|\,(p^{3\alpha-\beta}\cdot x^3+y)\Rightarrow p\,|\,(p^{3\alpha-\beta}\cdot x^3+y)$，所以 $3\alpha-\beta=0\Rightarrow \beta=3\alpha$。

因為對於所有 b 的質因數 p，都有 $\beta=3\alpha$，所以 $b=a^3$，

故 $\dfrac{a^3+b}{ab}=\dfrac{a^3+a^3}{a^4}=\dfrac{2}{a}$ 為正整數，故 $(a,b)=(2,8)$。

綜合以上討論可知 $(a,b)=(1,1)$ 或 $(2,8)$。

5-5 試找出所有滿足方程式 $x^2+xy+y^2+3x+6y+6=0$ 的整數數對 (x,y)。

答：$(x,y)=(-2,-2),(-1,-1),(-1,-4),(1,-2),(1,-5),(2,-4)$

解：

將方程式整理為 $y^2+(x+6)y+(x^2+3x+6)=0$，將之視為 y 的二次方程式，

則其判別式為 $D=(x+6)^2-4(x^2+3x+6)=-3x^2+12$。

因為 y 為實數，所以 $D\ge 0\Rightarrow -3x^2+12\ge 0\Rightarrow x^2\le 4\Rightarrow x=-2,-1,0,1,2$。

若 $x=-2$，則 $y^2+4y+4=0\Rightarrow y=-2$。

若 $x=-1$，則 $y^2+5y+4=0\Rightarrow y=-1$ 或 -4。

若 $x=0$，則 $y^2+6y+6=0\Rightarrow y$ 無整數解。。

若 $x=1$，則 $y^2+7y+10=0\Rightarrow y=-2$ 或 -5。

若 $x=2$，則 $y^2+8y+16=0\Rightarrow y=-4$。

故 (x,y) 共有 6 組整數解：$(-2,-2),(-1,-1),(-1,-4),(1,-2),(1,-5),(2,-4)$。

5-6 已知綠綠班有 44 名學生。現在綠綠班要投票選班代，每位學生都是候選人。投票方法如下：對每位學生而言，他可以對每位候選人（包含自己）投出「同意」或「不同意」兩種選擇，而且同意票的票數沒有限制（意即他最多可以對全班 44 人都投下「同意票」）。

假設從這 44 位學生之中任選 2 個人出來，都可以發現他們曾經投同意票給同一個人過，請證明：一定有人在這次選舉中得了 8 票以上。

解：

反證法：假設每位候選人至多只得到 7 票同意票。

如果有兩位投同意票給同一個人過，則稱他們為「1 對」，

則根據題意，必有 C_2^{44} 對學生。

又，從候選人觀點考慮，因為至多得到 7 票同意票，

所以投同意票給他的人，至多可以組成 C_2^{7} 對學生，

故考慮全班「1 對」的數目至多只有 $44\times C_2^{7}$，

於是 $C_2^{44} \le 44\times C_2^{7} \Rightarrow \dfrac{44\times 43}{2} \le 44\times\dfrac{7\times 6}{2} \Rightarrow 43 \le 42$，矛盾。

故假設錯誤，所以一定有人在這次選舉中得了 8 票以上，證畢。