

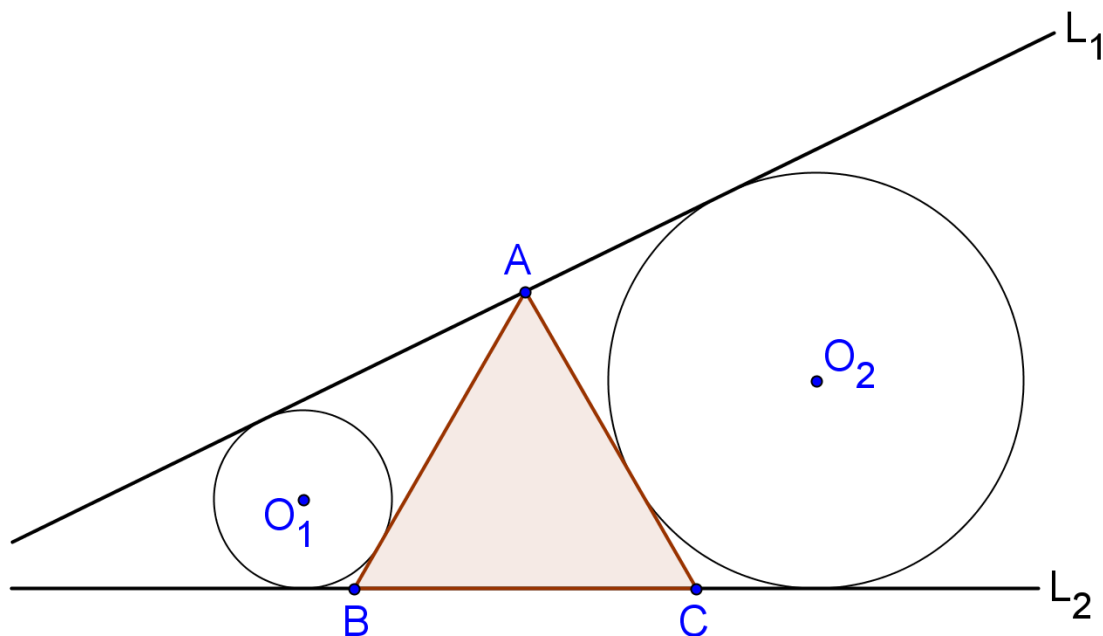
北一女中 104 學年度下學期《數戰數決》有獎徵答活動

第四期題目：

2016 年 03 月 18 日下午 1 點鐘截止

4-1 請證明：從數列 $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \dots$ 中，不可能挑出無窮多項，使得這些數形成一個無窮多項的等差數列。

4-2 如下圖，已知 $\triangle ABC$ 是邊長為 6 的正三角形。過 A 點在 $\triangle ABC$ 外部作一直線 L_1 ，延長 \overline{BC} 為直線 L_2 。作圓 O_1 與 \overline{AB}, L_1, L_2 皆相切、作圓 O_2 與 \overline{AC}, L_1, L_2 皆相切，且圓 O_1 與圓 O_2 都在 $\triangle ABC$ 外部。
假設圓 O_1 與圓 O_2 的半徑分別為 r_1 、 r_2 ，試求 $r_1 + r_2$ 之值。



4-3 若有 n 個連續正整數的和為 2016，試求 n 的最大值。

4-4 已知 x, y, z 為正實數，試求方程組
$$\begin{cases} x\sqrt{y} = z + x \\ y\sqrt{z} = x + y \\ z\sqrt{x} = y + z \end{cases}$$
 所有的解 (x, y, z) 。

4-5 小綠有一個 10×10 的方格表 (如下圖 1)。另外還有一些用 4 方格構成的「T 字型方塊」(如下圖 2)，以及 4×1 的「一字形方塊」(如下圖 3) 去覆蓋。

(1) 請證明小綠無法用 25 個「T 字型方塊」覆蓋 10×10 的方格表。

(2) 請證明小綠無法用 25 個「一字形方塊」覆蓋 10×10 的方格表。

註：所謂「覆蓋」，意思是恰好可以將方格表蓋滿 (沒有縫隙、沒有凸出)，而且方塊彼此不重疊。而這些「T 字型方塊」與「一字形方塊」可任意旋轉使用。

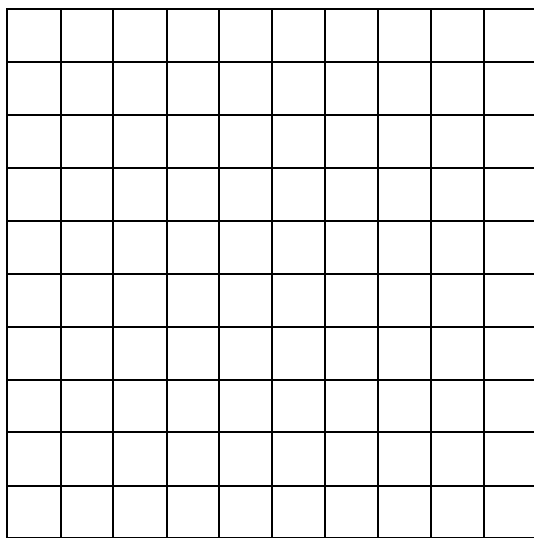


圖 1

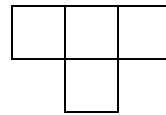


圖 2



圖 3

4-6 定義數列 $a(n) = \lceil n \text{ 的正因數中最大的奇數} \rceil$ ，其中 $n \in \mathbb{N}$ 。

例如 $\langle a(n) \rangle$ 的前 10 項為 $1, 1, 3, 1, 5, 3, 7, 1, 9, 5, \dots$ 。

請證明：
$$\sum_{k=1}^{2^n} a(k) = a(1) + a(2) + a(3) + \dots + a(2^n) = \frac{4^n + 2}{3}。$$