北一女中 104 學年度下學期《數戰數決》有獎徵答活動

第四期題目：

2016 年 03 月 18 日下午 1 點鐘截止

4-1 請證明：從數列$1^2,2^2,3^2,4^2,5^2,\cdots\cdots$中，不可能挑出無窮多項，使得這些數形成一個無窮多項的等差數列。

解：

反證法：

假設可從數列$1^2,2^2,3^2,4^2,5^2,\cdots\cdots$中挑出無窮多項的等差數列$\langle a_n\rangle$，其公差為 d。

顯然，一定存在一個正整數 n，使得$n>d$。

因為$\langle a_n\rangle$是從$1^2,2^2,3^2,4^2,5^2,\cdots\cdots$中挑出的，所以$a_n\ge n^2$且$a_{n+1}\ge(\sqrt{a_n}+1)^2$。

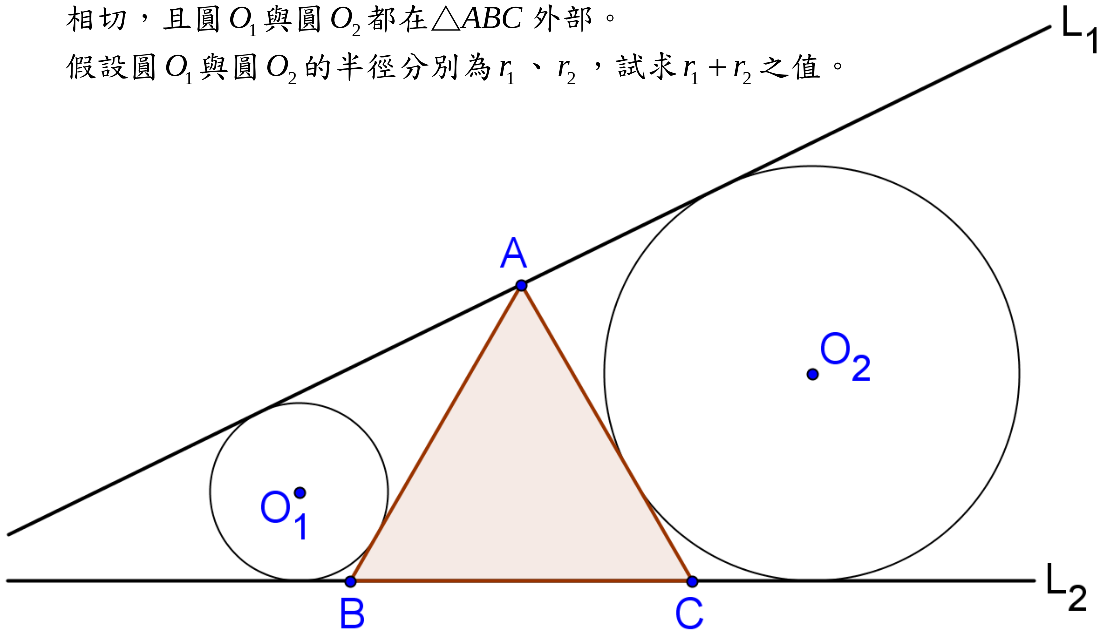
故$a_n+d=a_{n+1}\ge(\sqrt{a_n}+1)^2=a_n+2\sqrt{a_n}+1>a_n+2\sqrt{n^2}=a_n+2n$

$\Rightarrow d\ge 2n$，此與$n>d$矛盾。

於是可證得：從數列$1^2,2^2,3^2,4^2,5^2,\cdots\cdots$中，不可能挑出無窮多項，使得這些數形成一個無窮多項的等差數列。

4-2 如下圖，已知$\triangle ABC$是邊長為 6 的正三角形。過 A 點在$\triangle ABC$外部作一直線L_1，延長$\overline{BC}$為直線L_2。作圓O_1與$\overline{AB},L_1,L_2$皆相切、作圓O_2與$\overline{AC},L_1,L_2$皆相切，且圓O_1與圓O_2都在$\triangle ABC$外部。

假設圓O_1與圓O_2的半徑分別為r_1、r_2，試求r_1+r_2之值。



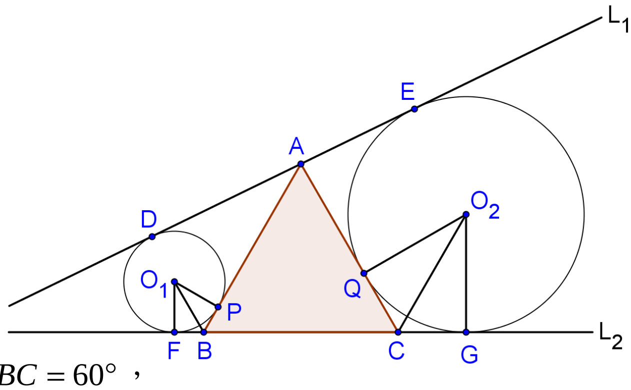
答：$r_1+r_2=3\sqrt{3}$

解：

如右圖，O_1,O_2 為兩圓圓心，

D,E,F,G,P,Q 為切點，

連接 $\overline{O_1F},\overline{O_1B},\overline{O_1P},\overline{O_2Q},\overline{O_2C},\overline{O_2G}$ 。



因為$\triangle ABC$是正三角形，所以$\angle ABC=60^\circ$，

故 $\angle O_1BF=\angle O_1BP=\dfrac{1}{2}(180^\circ-\angle ABC)=60^\circ$ ，

於是 $\overline{BF}=\overline{BP}=\dfrac{r_1}{\sqrt{3}}$ 。同理，$\overline{CQ}=\overline{CG}=\dfrac{r_2}{\sqrt{3}}$ 。

又，$\overline{DE},\overline{FG}$ 為兩圓之外公切線段，所以 $\overline{DE}=\overline{FG}$ 。

$$\overline{DE}=\overline{AD}+\overline{AE}=\overline{AP}+\overline{AQ}=(\overline{AB}-\overline{BP})+(\overline{AC}-\overline{CQ})$$

$$=(6-\frac{r_1}{\sqrt{3}})+(6-\frac{r_2}{\sqrt{3}})=12-\frac{1}{\sqrt{3}}(r_1+r_2)$$ 。

而 $\overline{FG}=\overline{FB}+\overline{BC}+\overline{CG}=\dfrac{r_1}{\sqrt{3}}+6+\dfrac{r_2}{\sqrt{3}}=6+\dfrac{1}{\sqrt{3}}(r_1+r_2)$ ，

所以$12-\dfrac{1}{\sqrt{3}}(r_1+r_2)=\overline{DE}=\overline{FG}=6+\dfrac{1}{\sqrt{3}}(r_1+r_2)\Rightarrow r_1+r_2=3\sqrt{3}$ 。

4-3　若有 n 個連續正整數的和為 2016，試求 n 的最大值。

答：63。

解：

假設 n 個連續正整數$a+1,a+2,a+3,\cdots\cdots,a+n$的和為 2016，

則 $\dfrac{[(a+1)+(a+n)]\cdot n}{2}=2016\Rightarrow n\times(n+2a+1)=4032=2^6\times 3^2\times 7$ 。

因為 n 與 $(n+2a+1)$ 必恰好一奇一偶，所以 $2^6\mid n$ 或 $2^6\mid(n+2a+1)$ 。

若 $2^6\mid n$ ，則 $(n+2a+1)\le 3^2\times 7=63<64=2^6\le n$ ，矛盾。

故 $2^6\mid(n+2a+1)$ ，所以 n 至多為 $3^2\times 7=63$ 。

若 n 恰好為 63，則 $(n+2a+1)=64\Rightarrow a=0$ ，

此時題目所求的 n 個連續正整數為$1,2,3,\cdots\cdots,63$ 。故 n 的最大值為 63。

4-4 已知x,y,z為正實數，試求方程組$\begin{cases} x\sqrt{y}=z+x \\ y\sqrt{z}=x+y \\ z\sqrt{x}=y+z \end{cases}$所有的解$(x,y,z)$。

答：$(x,y,z)=(4,4,4)$。

解：

若$x>y$，則$z+x>y+z \Rightarrow x\sqrt{y}>z\sqrt{x} \Rightarrow z<\sqrt{xy}<\sqrt{xx}=x$。

因為$x>z$，所以$x+y>y+z \Rightarrow y\sqrt{z}>z\sqrt{x} \Rightarrow y>\sqrt{zx}>\sqrt{zz}=z$。

因為$y>z$，所以$x+y>z+x \Rightarrow y\sqrt{z}>x\sqrt{y} \Rightarrow x<\sqrt{yz}<\sqrt{yy}=y$，矛盾。

故必有$x\le y$。同理可證明$y\le z$、$z\le x$。

於是$x\le y\le z\le x$，所以必有$x=y=z$。

代回原方程組第一式可得$x\sqrt{x}=x+x \Rightarrow x\sqrt{x}=2x \Rightarrow \sqrt{x}=2 \Rightarrow x=4$

$\Rightarrow y=z=x=4$。

將$(x,y,z)=(4,4,4)$代回原方程組檢驗亦符合，故$(x,y,z)=(4,4,4)$為唯一解。

4-5 小綠有一個10×10的方格表（如下圖 1）。另外還有一些用 4 方格構成的「T 字型方塊」（如下圖 2），以及4×1的「一字形方塊」（如下圖 3）去覆蓋。

(1) 請證明小綠無法用 25 個「T 字型方塊」覆蓋10×10的方格表。

(2) 請證明小綠無法用 25 個「一字型方塊」覆蓋10×10的方格表。

註：所謂「覆蓋」，意思是恰好可以將方格表蓋滿（沒有縫隙、沒有凸出），而且方塊彼此不重疊。而這些「T 字型方塊」與「一字型方塊」可任意旋轉使用。

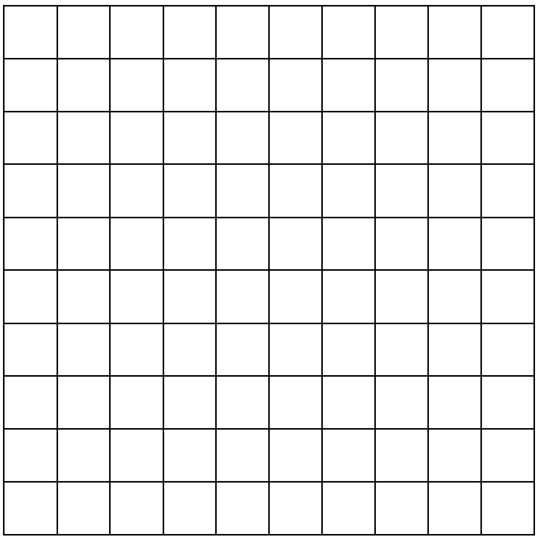


圖 1

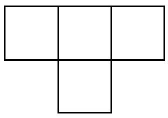


圖 2

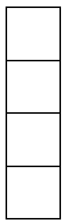
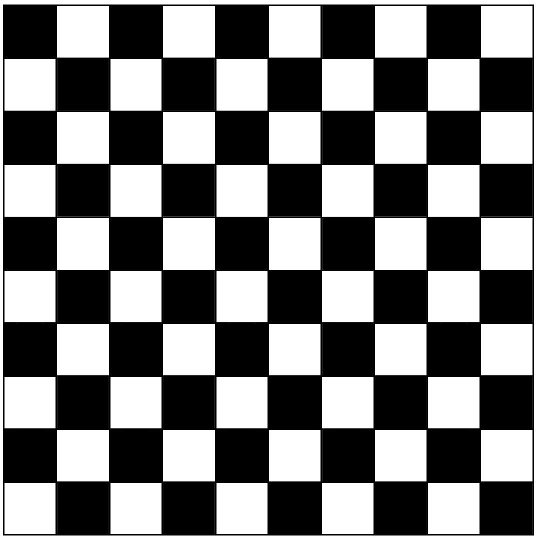


圖 3

解：

(1)



如左圖，
將10×10的方格表塗色成黑白相間，
共有 50 個黑色方格與 50 個白色方格。

假設小綠可以用 25 個「T 字型方塊」覆蓋10×10的方格表。

顯然每一個 T 字型方塊都會覆蓋到「3 白 1 黑」或是「3 黑 1 白」，
假設 25 個 T 字型方塊中，有 m 個覆蓋「3 白 1 黑」、n 個覆蓋「3 黑 1 白」，
則$\begin{cases} 3m+n=50 \\ m+3n=50 \end{cases}$，可解出 $m=n=\dfrac{25}{2}$，矛盾。

(2)

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3

將10×10的方格表如左圖編號，
則共有 25 個 1 號方格、26 個 2 號方格、25 個 3 號方格、24 個 4 號方格。

假設小綠可以用 25 個「一字型方塊」覆蓋10×10的方格表。

顯然每一個一字型方塊都會覆蓋到編號「1」、「2」、「3」、「4」方格各一，
所以 25 個一字型方塊應該恰好覆蓋到編號「1」、「2」、「3」、「4」各 25 個，
矛盾。

4-6　定義數列 $a(n)=$「n 的正因數中最大的奇數」，其中 $n\in\mathbb{N}$。

例如 $\langle a(n)\rangle$ 的前 10 項為 $1,1,3,1,5,3,7,1,9,5,\cdots\cdots$。

請證明：$$\sum_{k=1}^{2^n} a(k)=a(1)+a(2)+a(3)+\cdots\cdots+a(2^n)=\frac{4^n+2}{3}$$。

解：

對於所有 $m\in\mathbb{N}$，考慮 $a(2^{m-1}+1),a(2^{m-1}+2),a(2^{m-1}+3),\cdots\cdots,a(2^{m-1}+2^{m-1})$，

若其中兩數相等，假設 $a(2^{m-1}+x)=a(2^{m-1}+y)=C$，其中 $1\le x<y\le 2^{m-1}$，

則 $\dfrac{2^{m-1}+x}{C}$ 與 $\dfrac{2^{m-1}+y}{C}$ 都是 2 的冪次（即 2^j，其中 j 為非負整數），

又因為 $\dfrac{2^{m-1}+x}{C}<\dfrac{2^{m-1}+y}{C}$，所以 $\dfrac{2^{m-1}+y}{C}\ge 2\times\dfrac{2^{m-1}+x}{C}\Rightarrow y\ge 2^{m-1}+2x$，

此與 $y\le 2^{m-1}$ 矛盾，

故 $a(2^{m-1}+1),a(2^{m-1}+2),a(2^{m-1}+3),\cdots\cdots,a(2^{m-1}+2^{m-1})$ 兩兩互異。

又因為這些數都是 1～2^m 中的奇數，

所以 $a(2^{m-1}+1),a(2^{m-1}+2),a(2^{m-1}+3),\cdots\cdots,a(2^{m-1}+2^{m-1})$

就是 $1,3,5,\cdots\cdots,2^m-1$（順序可能不同）。

故 $a(2^{m-1}+1)+a(2^{m-1}+2)+a(2^{m-1}+3)+\cdots\cdots+a(2^{m-1}+2^{m-1})$

$=1+3+5\cdots\cdots+2^m-1=\dfrac{[1+(2^m-1)]\times 2^{m-1}}{2}=2^{2m-2}$，

於是 $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n} a(k)=a(1)+a(2)+a(3)+\cdots\cdots+a(2^n)$

$=a(1)+[a(2)]+[a(3)+a(4)]+\cdots\cdots+[a(2^{n-1}+1)+a(2^{n-1}+2)+\cdots\cdots+a(2^n)]$

$=1+2^0+2^2+\cdots\cdots+2^{2n-2}$

$=1+\dfrac{4^n-1}{4-1}=\dfrac{4^n+2}{3}$。