

北一女中 105 學年度上學期《數戰數決》有獎徵答活動

第三期題目：

2017 年 01 月 05 日下午 1 點鐘截止

3-1 已知 $ABCD$ 為凸四邊形，且 M 、 N 分別為 \overline{AD} 、 \overline{BC} 的中點。

連接 \overline{AN} 、 \overline{BM} ，令其交點為 P 。再連接直線 CP 、 DP 。

請證明：若直線 CP 、 DP 將 \overline{AB} 三等分，則 $ABCD$ 為平行四邊形。

3-2 對於正整數 n ，定義 $S(n) = \lceil n \text{ 的正因數之和} \rceil$ ，例如 $S(7) = 1 + 7 = 8$ 、
 $S(10) = 1 + 2 + 5 + 10 = 18$ 、 $S(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$ 。

請證明：對於所有正整數 n ，均有 $S(1) + S(2) + \dots + S(n) \leq n^2$ 。

3-3 小綠將若干個紅球與白球排成一列（兩種顏色的球都有）。

已知：若兩個球中間夾了 7 個球或 12 個球，則這兩個球的顏色必須相同。

請證明：小綠最多可以排 19 個球。

3-4 某日，小綠和摩卡玩遊戲。小綠將 10 顆鑽石排成一直線，但他告訴摩卡其中恰有 2 顆是假鑽石，而且這 2 顆假鑽石的位置是相鄰的。小綠允許摩卡可以如下方式提問 2 次：摩卡指定其中幾顆鑽石，然後問小綠這幾顆鑽石裡面有幾顆是假鑽石。摩卡提問 2 次完畢後，小綠才將 2 題的答案一次告訴摩卡。請問：摩卡有辦法透過這 2 個答案知道哪 2 顆是假鑽石嗎？

如果可以，請寫出摩卡的策略。

3-5 請找出所有正整數對 (m, n) ，使得 $m^2 + 3n$ 與 $n^2 + 3m$ 都是完全平方數。

3-6 如圖，已知 $ABCD$ 為圓內接四邊形，

Γ 為其外接圓。

令直線 AB 與直線 CD 的交點為 P ，

分別過 B 點與 D 點作圓 Γ 的切線交於點 Q 。

若 $\overline{AB} = \overline{BP}$ 且 $\overline{AB} \parallel \overline{DQ}$ ，

請證明： A 、 C 、 Q 三點共線。

