北一女中 105 學年度上學期《數戰數決》有獎徵答活動

第三期解答：

3-1　已知 $ABCD$ 為凸四邊形，且 M、N 分別為 $\overline{AD}$ 、$\overline{BC}$ 的中點。

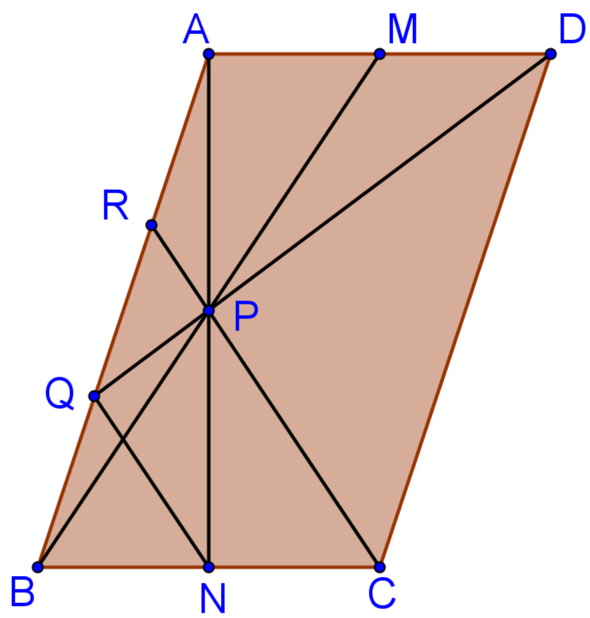
連接 $\overline{AN}$ 、$\overline{BM}$ ，令其交點為 P。再連接直線 CP、DP。

請證明：若直線 CP、DP 將 $\overline{AB}$ 三等分，則 $ABCD$ 為平行四邊形。

解：

假設直線 CP、DP 與 $\overline{AB}$ 的交點分別為 R、Q。

連接 $\overline{QN}$ 。



因為 Q、N 分別為 $\overline{RB}$ 、$\overline{BC}$ 的中點，

所以 $\overline{QN} // \overline{RC}$ 且 $\overline{QN} = \frac{1}{2}\overline{RC}$ 。

因為 $\overline{QN} // \overline{RC}$ 且 R 為 $\overline{AQ}$ 中點，

所以 $\overline{AP} = \overline{PN}$ 。

同理，亦有 $\overline{MP} = \overline{PB}$ 。

所以四邊形 $AMNB$ 的對角線互相平分，故 $AMNB$ 為平行四邊形。

於是 $\overline{AM}$ 、$\overline{BN}$ 平行且相等，故 $\overline{AD}$ 、$\overline{BC}$ 亦是平行且相等，

所以 $ABCD$ 為平行四邊形，證畢。

3-2　對於正整數 n，定義 $S(n)=$「n 的正因數之和」，例如 $S(7)=1+7=8$、$S(10)=1+2+5+10=18$、$S(12)=1+2+3+4+6+12=28$。

請證明：對於所有正整數 n，均有 $S(1)+S(2)+\cdots\cdots+S(n)\le n^2$。

解：

將 $S(k)$ 先先逐項寫出：

$S(1)=1$；

$S(2)=1+2$；

$S(3)=1+3$；

$S(4)=1+2+4$；

$\vdots$

$S(n)=1+\cdots\cdots+n$。

考慮任意 k 在上列各式右端出現的次數：

1 出現 n 次、2 出現至多 $\dfrac{n}{2}$ 次、3 至多出現 $\dfrac{n}{3}$ 次、……、k 至多出現 $\dfrac{n}{k}$ 次、……、n 出現 $\dfrac{n}{n}=1$ 次。

$$\text{所以 } S(1)+S(2)+\cdots\cdots+S(n)\le 1\cdot n+2\cdot\frac{n}{2}+3\cdot\frac{n}{3}+\cdots\cdots+n\cdot\frac{n}{n}$$

$$=\underbrace{n+n+n+\cdots\cdots+n}_{n\text{個}}=n^2$$

，證畢。

3-3 小綠將若干個紅球與白球排成一列（兩種顏色的球都有）。

已知：若兩個球中間夾了 7 個球或 12 個球，則這兩個球的顏色必須相同。

請證明：小綠最多可以排 19 個球。

解：

假設小綠排列的球數為 n，

且第 k 個球是紅球時，記為 $c_k = r$；第 k 個球是白球時，記為 $c_k = w$。

根據題意，兩個球中間夾了 7 個球，則此兩球顏色相同，

所以 $c_{k+8} = c_k$，其中 $1 \le k \le n-8$；同理可知 $c_{k+13} = c_k$，其中 $1 \le k \le n-13$。

若 $n \ge 20$，則 $c_1, c_2, \cdots\cdots, c_{20}$ 都存在。

故 $c_1 = c_9 = c_{17} = c_4 = c_{12} = c_{20} = c_7 = c_{15} = c_2 = c_{10} = c_{18} = c_5 = c_{13}$

（底標不足 13 就加 8、超過 13 就減 13）；

且 $c_1 = c_{14} = c_6 = c_{19} = c_{11} = c_3 = c_{16} = c_8$（底標不足 8 就加 13、超過 8 就減 8）；

但如此一來，前 20 個球的顏色都相同。

再根據「$c_{k+8} = c_k$，其中 $1 \le k \le n-8$」即可知所有球的顏色都相同，矛盾。

故 $n \le 19$。

同上述討論可知：

$c_1 = c_9 = c_{17} = c_4 = c_{12}$ 且 $c_7 = c_{15} = c_2 = c_{10} = c_{18} = c_5 = c_{13}$（將 c_{20} 那一項截斷），

以及 $c_1 = c_{14} = c_6 = c_{19} = c_{11} = c_3 = c_{16} = c_8$，

所以小綠可以安排如下：

順序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
顏色	紅	白	紅	紅	白	紅	白	紅	紅	白	紅	紅	白	紅	白	紅	紅	白	紅

檢驗可知這樣的排列滿足題意。

3-4 某日，小綠和摩卡玩遊戲。小綠將 10 顆鑽石排成一直線，但他告訴摩卡其中恰有 2 顆是假鑽石，而且這 2 顆假鑽石的位置是相鄰的。小綠允許摩卡可以如下方式提問 2 次：摩卡指定其中幾顆鑽石，然後問小綠這幾顆鑽石裡面有幾顆是假鑽石。摩卡提問 2 次完畢後，小綠才將 2 題的答案一次告訴摩卡。

請問： 摩卡有辦法透過這 2 個答案知道哪 2 顆是假鑽石嗎？

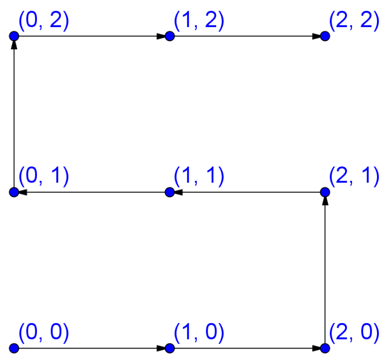
如果可以，請寫出摩卡的策略。

解：

假設第 m 顆與第 n 顆鑽石是假的，其中 $m<n$ ，則記為 $[m,n]$ 。

因為假鑽石的位置是相鄰的，所以只有 9 種可能：

$[1,2],[2,3],[3,4],[4,5],[5,6],[6,7],[7,8],[8,9],[9,10]$ 。



假設摩卡第一次指定的鑽石中有 p 顆假鑽石、第二次指定的鑽石中有 q 顆假鑽石，則記為 (p,q) 。而這也恰有 9 種可能：

$(0,0),(1,0),(2,0),(2,1),(1,1),(0,1),(0,2),(1,2),(2,2)$ 。

（請注意上述的排列順序如右圖）

我們可以試驗 $[1,2],[2,3],[3,4],[4,5],[5,6],[6,7],[7,8],[8,9],[9,10]$

恰好對應到 $(0,0),(1,0),(2,0),(2,1),(1,1),(0,1),(0,2),(1,2),(2,2)$ 的情形。

因為 $[9,10]$ 對應到 $(2,2)$ ，所以摩卡兩次都指定了第 9 顆與第 10 顆鑽石。

又因為 $[8,9]$ 對應到 $(1,2)$ ，所以摩卡只有第二次指定了第 8 顆鑽石。

又因為 $[7,8]$ 對應到 $(0,2)$ ，所以摩卡只有第二次指定了第 7 顆鑽石。

又因為 $[6,7]$ 對應到 $(0,1)$ ，所以摩卡兩次都沒有指定第 6 顆鑽石。

又因為 $[5,6]$ 對應到 $(1,1)$ ，所以摩卡兩次都指定了第 5 顆鑽石。

又因為 $[4,5]$ 對應到 $(2,1)$ ，所以摩卡只有第一次指定了第 4 顆鑽石。

又因為 $[3,4]$ 對應到 $(2,0)$ ，所以摩卡只有第一次指定了第 3 顆鑽石。

又因為 $[2,3]$ 對應到 $(1,0)$ ，所以摩卡兩次都沒有指定第 2 顆鑽石。

又因為 $[1,2]$ 對應到 $(0,0)$ ，所以摩卡兩次都沒有指定第 1 顆鑽石。

綜合以上所述，只要摩卡第一次指定第 3、4、5、9、10 顆鑽石，第二次指定第 5、7、8、9、10 顆鑽石，即可從小綠的回答判斷出哪 2 顆是假鑽石。

3-5 請找出所有正整數對(m,n)，使得m^2+3n與n^2+3m都是完全平方數。

答：$(m,n)=(1,1),(16,11),(11,16)$。

解：

不妨假設$m\ge n$，則$m^2<m^2+3n\le m^2+3m<m^2+4m+4=(m+2)^2$，

所以m^2+3n是個介在m^2與$(m+2)^2$之間的完全平方數，

所以m^2+3n只能是$(m+1)^2\Rightarrow m^2+3n=m^2+2m+1\Rightarrow m=\dfrac{3n-1}{2}$。

假設$n^2+3m=k^2$，則$n^2+\dfrac{9n-3}{2}=k^2\Rightarrow 16n^2+72n-24=16k^2$

$$\Rightarrow (4n+9)^2-16k^2=105$$

$$\Rightarrow (4n+9-4k)(4n+9+4k)=105\text{。}$$

105 可分解為1×105或3×35或5×21或7×15。

因為$4n+9-4k<4n+9+4k$，

所以$\begin{cases}4n+9-4k=1\\4n+9+4k=105\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n=11\\k=13\end{cases}$或$\begin{cases}4n+9-4k=3\\4n+9+4k=35\end{cases}\Rightarrow$無正整數解

或$\begin{cases}4n+9-4k=5\\4n+9+4k=21\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n=1\\k=2\end{cases}$或$\begin{cases}4n+9-4k=7\\4n+9+4k=15\end{cases}\Rightarrow$無正整數解。

當$\begin{cases}n=11\\k=13\end{cases}$時，$m=\dfrac{3n-1}{2}=16$，此時$\begin{cases}m^2+3n=289=17^2\\n^2+3m=169=13^2\end{cases}$滿足題意。

當$\begin{cases}n=1\\k=2\end{cases}$時，$m=\dfrac{3n-1}{2}=1$，此時$\begin{cases}m^2+3n=4=2^2\\n^2+3m=4=2^2\end{cases}$滿足題意。

故滿足題意的所有正整數對$(m,n)=(1,1),(16,11),(11,16)$。

3-6 如圖，已知 $ABCD$ 為圓內接四邊形，

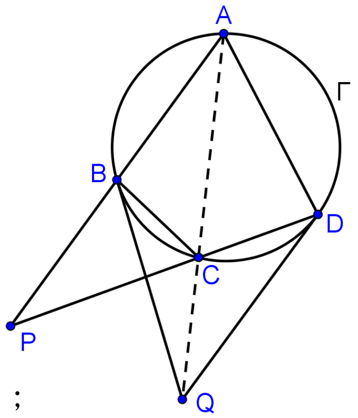
Γ 為其外接圓。

令直線 AB 與直線 CD 的交點為 P，

分別過 B 點與 D 點作圓 Γ 的切線交於點 Q。

若 $\overline{AB}=\overline{BP}$ 且 $\overline{AB}\,//\,\overline{DQ}$，

請證明：A、C、Q 三點共線。



解：

因為 $ABCD$ 為圓內接四邊形，所以 $\angle ADC=\angle PBC$；

又因為 $\overline{AB}\,//\,\overline{DQ}$，所以 $\angle DAC=\frac{1}{2}\overset{\frown}{CD}=\angle CDQ$（弦切角）

$=\angle BPC$（內錯角相等）;

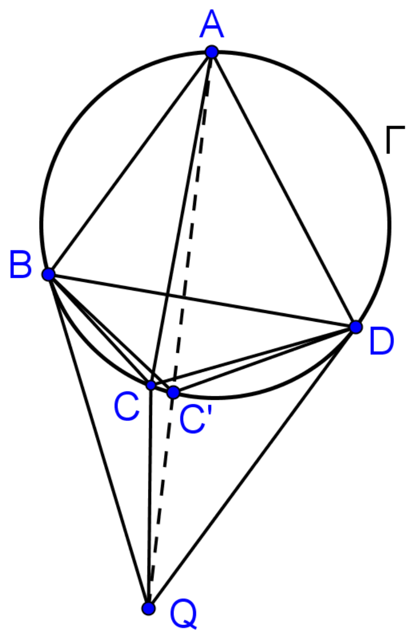
故 $\triangle DAC\sim\triangle CBP$（AA 相似性質）$\Rightarrow \overline{PB}:\overline{BC}=\overline{AD}:\overline{DC}$。

因為 $\overline{AB}=\overline{BP}$，所以 $\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{AD}:\overline{DC}$。

假設 $\overline{AQ}$ 與 $\overset{\frown}{BC}$ 交於點 C'。

以下證明 C' 與 C 是同一點，

即可證得 A、C、Q 三點共線。



因為 $\angle BAC'=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC'}=\angle C'BQ$（弦切角），

且 $\angle BQC'=\angle BQC'$，

所以 $\triangle BQC'\sim\triangle AQB$

$\Rightarrow \overline{AB}:\overline{BC'}=\overline{AQ}:\overline{BQ}$。

同理可證得 $\overline{AD}:\overline{DC'}=\overline{AQ}:\overline{DQ}$。

又因為 $\overline{BQ}=\overline{DQ}$，所以 $\overline{AB}:\overline{BC'}=\overline{AD}:\overline{DC'}$，於是 $\frac{\overline{BC'}}{\overline{DC'}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{DC}}$。

而 $\angle BC'D=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BAD}=\angle BCD$，所以 $\triangle BC'D\sim BCD\Rightarrow\angle BDC'=\angle BDC$，

故 $\overleftrightarrow{DC'}$ 與 $\overleftrightarrow{DC}$ 重合 $\Rightarrow C'$ 與 C 是同一點，證畢。