

北一女中 105 學年度上學期《數戰數決》有獎徵答活動

第二期題目：

2016 年 11 月 17 日下午 1 點鐘截止

2-1 已知黑板上有 $1, 2, 3, \dots, 2016$ 這 2016 個正整數。小綠 可以從黑板上任意挑選兩個數擦掉，但要補寫上此兩數的算術平均數。例如：小綠 擦掉 5 和 8 之後，必須再寫上 6.5。小綠 持續重複此操作，直到黑板上剩下一個數為止。請證明：

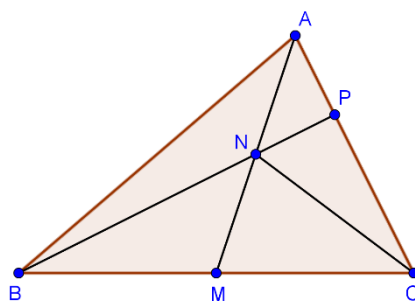
- (1) 小綠 一定有辦法讓黑板上最後剩下的數為 2。
- (2) 小綠 一定有辦法讓黑板上最後剩下的數為 1000。

2-2 如右圖， $\triangle ABC$ 中， M 為 \overline{BC} 的中點。

連接 \overline{AM} ，再取 \overline{AM} 的中點 N 。

連接直線 \overline{BN} 與 \overline{AC} 交於點 P ，連接 \overline{CN} 。

請證明：若 $\overline{CM} = \overline{CN}$ ，則 $\overline{PA} = \overline{PN}$ 。



2-3 請找出所有的正整數組 (a, b, c) ，使得 $a \leq b \leq c$ ，且滿足此三數的最小公倍數恰好就是 $a + b + c$ 。

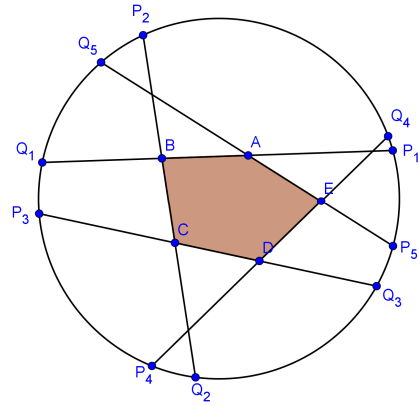
2-4 小綠 從 $1, 2, 3, \dots, 2016$ 挑出了 n 個數，使得這 n 個數中的任三數之和都是 15 的倍數，則 n 的最大可能值為何？

2-5 已知五邊形 $ABCDE$ 的五邊等長，且位於一圓內部。

如右圖，延長 $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EA}$ ，
使得五邊的延長線分別交圓於點 P_k, Q_k ，
其中 $k = 1, 2, 3, 4, 5$ 。

請證明：
$$\overline{AP_1} + \overline{BP_2} + \overline{CP_3} + \overline{DP_4} + \overline{EP_5}$$

$$= \overline{BQ_1} + \overline{CQ_2} + \overline{DQ_3} + \overline{EQ_4} + \overline{AQ_5}。$$



2-6 小綠有 4033 張卡片，上面分別寫著號碼：0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, ……，2016, 2016，其中只有 0 是一張，其他正整數都是兩張。請證明：小綠可以將這 4033 張卡片排成一列，使得兩張 1 號的卡片中間恰有 1 張卡片、兩張 2 號的卡片中間恰有 2 張卡片、……、兩張 2016 號的卡片中間恰有 2016 張卡片。