北一女中 105 學年度上學期《數戰數決》有獎徵答活動

第二期解答：

2-1 已知黑板上有$1,2,3,\cdots\cdots,2016$這 2016 個正整數。小綠可以從黑板上任意挑選兩個數擦掉，但要補寫上此兩數的算術平均數。例如：小綠擦掉 5 和 8 之後，必須再寫上 6.5。小綠持續重複此操作，直到黑板上剩下一個數為止。請證明：

(1) 小綠一定有辦法讓黑板上最後剩下的數為 2。

(2) 小綠一定有辦法讓黑板上最後剩下的數為 1000。

解：

(1)

小綠可以先擦掉 2014 與 2016，則需補寫上 2015，

此時黑板上有 1～2013 與兩個 2015。

小綠再擦掉 2015 與 2015，則需補寫上 2015，此時黑板上有 1～2013 與 2015。

小綠再擦掉 2013 與 2015，則需補寫上 2014，此時黑板上有 1～2012 與 2014。

小綠再擦掉 2012 與 2014，則需補寫上 2013，此時黑板上有 1～2011 與 2013。

⋮

……………………………………………………，此時黑板上有 1～n 與$n+2$。

小綠再擦掉n與$n+2$，則需補寫上$n+1$，此時黑板上有 1～$n-1$與$n+1$。

⋮

……………………………………………………，此時黑板上有 1～2 與 4。

小綠再擦掉 2 與 4，則需補寫上 3，此時黑板上有 1、3。

最後小綠再擦掉 1 與 3，則需補寫上 2，此時黑板上只剩下最後的數，即為 2。

(2)

仿照第(1)小題的方法可知：

如果黑板上有$a,a+1,a+2,\cdots\cdots,a+k$，其中$k\geq 2$，

則小綠有辦法可以讓黑板上只留下$a+1$。

將 1～2016 分成兩組：1～1996、1997～2016。

小綠可以讓黑板上的 1～1996 只剩下 2，

也可以讓黑板上的 1997～2016 只剩下 1998，

此時小綠再擦掉 2 與 1998，則需補寫上 1000，

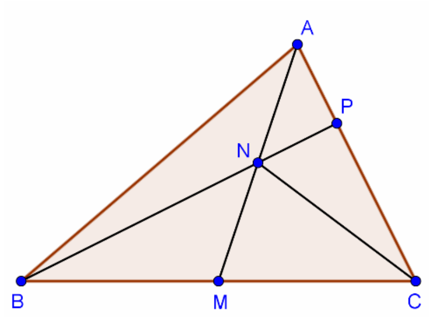
這就是黑板上的最後一個數，即滿足題目的要求。

2-2 如右圖，$\triangle ABC$ 中，M 為 $\overline{BC}$ 的中點。

連接 $\overline{AM}$ ，再取 $\overline{AM}$ 的中點 N。

連接直線 BN 與 $\overline{AC}$ 交於點 P，連接 $\overline{CN}$ 。

請證明：若 $\overline{CM}=\overline{CN}$ ，則 $\overline{PA}=\overline{PN}$ 。



解：

因為 $\overline{CM}=\overline{CN}$ ，所以 $\angle CMN=\angle CNM$

$\Rightarrow \angle BMN=180^\circ-\angle CMN=180^\circ-\angle CNM=\angle CNA$ 。

又 $\overline{MN}=\overline{NA}$ 、$\overline{MB}=\overline{MC}=\overline{NC}$ ，所以$\triangle BMN\cong\triangle CNA$（$SAS$ 全等性質），

故 $\angle BNM=\angle CAN$ 。

又 $\angle PNA=\angle BNM$ （對頂角相等），故 $\angle PNA=\angle CAN\Rightarrow \overline{PA}=\overline{PN}$ ，證畢。

2-3 請找出所有的正整數組 (a,b,c)，使得 $a\le b\le c$，且滿足此三數的最小公倍數恰好就是 $a+b+c$ 。

答：$(a,b,c)=(n,2n,3n)$ ，其中 $n\in\mathbb{N}$ 。

解：

因為 a,b,c 的最小公倍數為 $a+b+c$ ，所以 $c\,|\,(a+b+c)\Rightarrow c\,|\,(a+b)$ 。

於是 $a+b$ 必定是 c 的倍數，故 $a+b=c,2c,3c,\cdots\cdots$ 。

又因為 $a\le b\le c$ ，所以 $a+b\le c+c=2c\Rightarrow a+b=c$ 或 $2c$ 。

若 $a+b=2c$ ，則 $a+b=2c=c+c\ge a+b\Rightarrow a=b=c$ ，

但此時 a,b,c 的最小公倍數就是 c，而非 $a+b+c=3c$ ，矛盾。

所以只能是 $a+b=c$ ，則 a,b,c 的最小公倍數為 $a+b+c=2a+2b$ 。

於是 $b\,|\,(2a+2b)\Rightarrow b\,|\,2a$ ，故 $2a=b,2b,3b,\cdots\cdots$ 。

但因為 $a\le b\le c$ ，所以 $2a=b$ 或 $2b$ 。

若 $2a=2b$ ，則 $a=b\Rightarrow c=a+b=2a$ ，於是 $(a,b,c)=(a,a,2a)$ ，

此時 a,b,c 的最小公倍數就是 $2a=c$ ，而非 $a+b+c=3c$ ，矛盾。

所以只能是 $2a=b\Rightarrow c=a+b=3a$ ，於是 $(a,b,c)=(a,2a,3a)$ 。

此時 a,b,c 的最小公倍數就是 $6a$ ，恰好與 $a+b+c$ 相等。

故滿足條件的正整數組 $(a,b,c)=(n,2n,3n)$ ，其中 $n\in\mathbb{N}$ 。

2-4 小綠從$1,2,3,\cdots\cdots,2016$挑出了 n 個數，使得這 n 個數中的任三數之和都是 15 的倍數，則 n 的最大可能值為何？

答：135。

解：

假設小綠挑出的數由小到大排列為$a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n$。

先假定$n\geq 4$，則$15\,|\,(a_i+a_j+a_k)$且$15\,|\,(a_i+a_j+a_m)$，

所以$15\,|\,[(a_i+a_j+a_m)-(a_i+a_j+a_k)]\Rightarrow 15\,|\,(a_m-a_k)$，

故$a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n$之中，任兩數的差都必須是 15 的倍數。

所以在 1～15 中，小綠至多只能挑出一個數。

同理，在 16～30、31～45、……、1996～2010、2011～2016 之中，

小綠「至多」也只能各挑出一個數。

因為小綠至多只能從上述$\dfrac{2010}{15}+1=135$組數中各挑一個數，

所以至此我們可以確定 n 的最大可能值≤135。

如果小綠挑選所有$15k+5$形式的數，

亦即挑選$5,20,35,50,\cdots\cdots,2000,2015$共 135 個數，

則其中任三數之和為$(15k_1+5)+(15k_2+5)+(15k_3+5)$

$=15(k_1+k_2+k_3+1)$也是 15 的倍數。

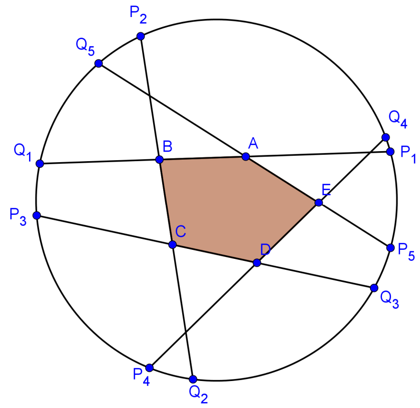
所以小綠可以挑選出 135 個數而且滿足題目要求。

綜合以上可知 n 的最大可能值為 135。

2-5 已知五邊形 $ABCDE$ 的五邊等長，且位於一圓內部。

如右圖，延長 $\overline{AB},\overline{BC},\overline{CD},\overline{DE},\overline{EA}$，

使得五邊的延長線分別交圓於點 P_k 、Q_k，其中 $k=1,2,3,4,5$ 。



請證明：$\overline{AP_1}+\overline{BP_2}+\overline{CP_3}+\overline{DP_4}+\overline{EP_5}$

$=\overline{BQ_1}+\overline{CQ_2}+\overline{DQ_3}+\overline{EQ_4}+\overline{AQ_5}$ 。

解：

假設 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}=\overline{EA}=x$，

則對於 A 點考慮圓內冪定理可得 $\overline{AP_1}\cdot(x+\overline{BQ_1})=\overline{AQ_5}\cdot(x+\overline{EP_5})$，

對於 B 點考慮圓內冪定理可得 $\overline{BP_2}\cdot(x+\overline{CQ_2})=\overline{BQ_1}\cdot(x+\overline{AP_1})$，

對於 C 點考慮圓內冪定理可得 $\overline{CP_3}\cdot(x+\overline{DQ_3})=\overline{CQ_2}\cdot(x+\overline{BP_2})$，

對於 D 點考慮圓內冪定理可得 $\overline{DP_4}\cdot(x+\overline{EQ_4})=\overline{DQ_3}\cdot(x+\overline{CP_3})$，

對於 E 點考慮圓內冪定理可得 $\overline{EP_5}\cdot(x+\overline{AQ_5})=\overline{EQ_4}\cdot(x+\overline{DP_4})$ 。

將上面五式相加，可得

$$(\overline{AP_1}+\overline{BP_2}+\overline{CP_3}+\overline{DP_4}+\overline{EP_5})\cdot x$$

$$+(\overline{AP_1}\cdot\overline{BQ_1}+\overline{BP_2}\cdot\overline{CQ_2}+\overline{CP_3}\cdot\overline{DQ_3}+\overline{DP_4}\cdot\overline{EQ_4}+\overline{EP_5}\cdot\overline{AQ_5})$$

$$=(\overline{AQ_5}+\overline{BQ_1}+\overline{CQ_2}+\overline{DQ_3}+\overline{EQ_4})\cdot x$$

$$+(\overline{EP_5}\cdot\overline{AQ_5}+\overline{AP_1}\cdot\overline{BQ_1}+\overline{BP_2}\cdot\overline{CQ_2}+\overline{CP_3}\cdot\overline{DQ_3}+\overline{DP_4}\cdot\overline{EQ_4})\text{，}$$

所以 $(\overline{AP_1}+\overline{BP_2}+\overline{CP_3}+\overline{DP_4}+\overline{EP_5})\cdot x=(\overline{AQ_5}+\overline{BQ_1}+\overline{CQ_2}+\overline{DQ_3}+\overline{EQ_4})\cdot x$

$\Rightarrow \overline{AP_1}+\overline{BP_2}+\overline{CP_3}+\overline{DP_4}+\overline{EP_5}=\overline{BQ_1}+\overline{CQ_2}+\overline{DQ_3}+\overline{EQ_4}+\overline{AQ_5}$，證畢。

2-6 小綠有 4033 張卡片，上面分別寫著號碼：$0,1,1,2,2,3,3,\cdots\cdots,2016,2016$，其中只有 0 是一張，其他正整數都是兩張。請證明：小綠可以將這 4033 張卡片排成一列，使得兩張 1 號的卡片中間恰有 1 張卡片、兩張 2 號的卡片中間恰有 2 張卡片、……、兩張 2016 號的卡片中間恰有 2016 張卡片。

解：

小綠可以將這 4033 張卡片如下由左至右排成七組（組內排序也是由左至右）：

A：$2015,2013,2011,2009,\cdots\cdots,5,3,1$（1008 張）

B：2016

C：$1,3,5,\cdots\cdots,2009,2011,2013,2015$（1008 張）

D：$2014,2012,2010,2008,\cdots\cdots,6,4,2$（1007 張）

E：0

F：2016

G：$2,4,6,\cdots\cdots,2008,2010,2012,2014$（1007 張）

以下證明這樣的排法滿足題目要求：

考慮奇數 $a=1,3,5,\cdots\cdots,2009,2011,2013,2015$，

則兩張 a 號的卡片中間夾著 A 組的末 $\frac{a-1}{2}$ 張、B 組 1 張、C 組的頭 $\frac{a-1}{2}$ 張卡片，所以兩張 a 號的卡片中間恰有 a 張卡片。

考慮偶數 $b=2,4,6,\cdots\cdots,2008,2010,2012,2014$，

則兩張 b 號的卡片中間夾著 D 組的末 $\frac{b-2}{2}$ 張、E 組 1 張、F 組 1 張、G 組的頭 $\frac{b-2}{2}$ 張卡片，所以兩張 b 號的卡片中間也恰有 b 張卡片。

考慮兩張 2016 號的卡片，中間夾著 C 組的 1008 張、D 組 1007 張、E 組 1 張卡片，所以兩張 2016 號的卡片中間恰有 2016 張卡片。

綜合以上所述，可知這樣的排法確實滿足題目要求。