

北一女中 105 學年度上學期《數戰數決》有獎徵答活動

第一期題目：

2016 年 10 月 06 日下午 1 點鐘截止

6-1 定義 $S(n) = n$ 的各位數字之和，例如 $S(2016) = 2 + 0 + 1 + 6 = 9$ 。

已知 $N = \underbrace{999 \dots 9}_{2016 \text{個} 9}$ ，試求 $S(N^2)$ 的值。

6-2 $\triangle ABC$ 中，分別以 \overline{AB} 、 \overline{AC} 為直徑作圓 Γ_1 、 Γ_2 。在 Γ_1 上任取一點 P ，在 Γ_2

上任取一點 Q ，請證明： $\overline{PQ} \leq \triangle ABC$ 的半周長。

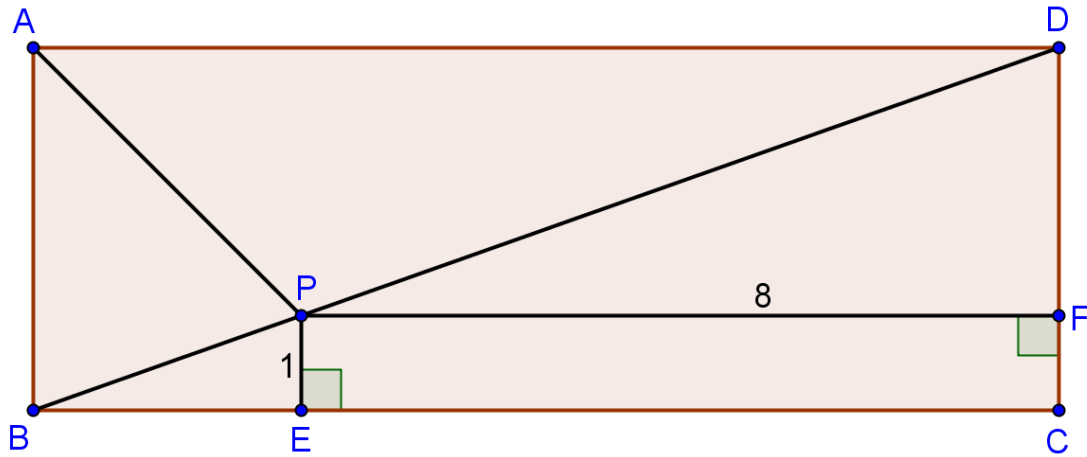
6-3 某日，摩卡與花花在直線跑道的兩端（假設端點分別為 A 、 B ）對峙。摩卡以等速從 A 點跑到 B 點後，馬上再以同樣的速率折返跑回 A 點。花花則是以等速從 B 點跑到 A 點後，馬上再以同樣的速率折返跑回 B 點（牠們兩貓的速率不同）。已知牠們第一次交會時，距離 B 點 20 公尺，而牠們都折返後發生第二次交會時，距離 A 點 10 公尺。請問：這條直線跑道長度為何？

6-4 有三正整數 a, b, c 。將 a 除以 b 會得到一商數 q_1 與一餘數 r_1 ；將 b 除以 c 會得到一商數 q_2 與一餘數 r_2 ；將 a 除以 c 會得到一商數 q_3 與一餘數 r_3 。

請證明：若 $q_1 > 2r_1$ 且 $q_2 > 2r_2$ ，則必有 $q_3 > 2r_3$ 。

6-5 如下圖，已知 $ABCD$ 為矩形。作 $\angle A$ 的內角平分線交對角線 \overline{BD} 於點 P 。

若 P 點到 \overline{BC} 、 \overline{CD} 的距離分別為 1、8，試求 \overline{BC} 與 \overline{CD} 的長度。



6-6 已知正實數 x, y 滿足 $x + y \leq 2$ ，請證明： $\frac{x}{xy + y} + \frac{y}{xy + x} \geq 1$ 。