北一女中 105 學年度上學期《數戰數決》有獎徵答活動

第一期解答：

1-1　定義 $S(n)=n$ 的各位數字之和，例如 $S(2016)=2+0+1+6=9$。

已知 $N=\underbrace{999\cdots\cdots9}_{2016個9}$，試求 $S(N^2)$ 的值。

答：18144。

解：

因為 $N=\underbrace{999\cdots\cdots9}_{2016個9}=10^{2016}-1$，

所以 $N^2=(10^{2016}-1)^2=10^{4032}-2\times10^{2016}+1$

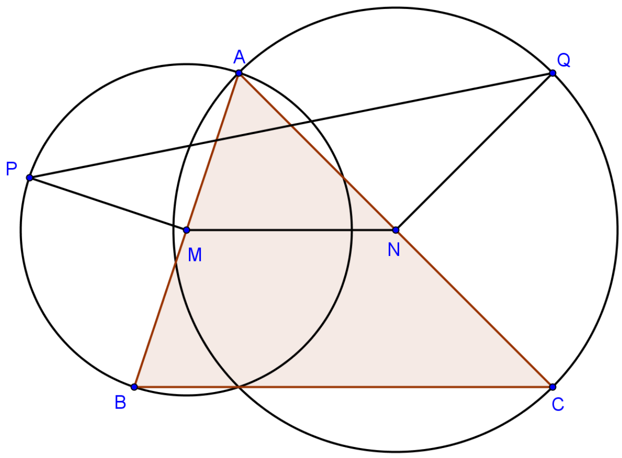
$$=1\underbrace{000\cdots\cdots0}_{4032個0}-2\underbrace{000\cdots\cdots0}_{2016個0}+1$$

$$\underbrace{999\cdots\cdots9}_{2015個0}8\underbrace{000\cdots\cdots0}_{2016個0}+1=\underbrace{999\cdots\cdots9}_{2015個0}8\underbrace{000\cdots\cdots0}_{2015個0}1$$，

故 $S(N^2)=9\times2015+8+1=18144$。

1-2　$\triangle ABC$ 中，分別以 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 為直徑作圓 Γ_1、Γ_2。在 Γ_1 上任取一點 P，在 Γ_2 上任取一點 Q，請證明：$\overline{PQ}\le\triangle ABC$ 的半周長。

解：



分別取 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 的中點 M、N，

則 M、N 分別為 Γ_1、Γ_2 的圓心。

連接 $\overline{PM},\overline{MN},\overline{NQ}$，

則 $\overline{PM}=\Gamma_1$ 的半徑 $=\frac{1}{2}\overline{AB}$，

$\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{BC}$，

$\overline{NQ}=\Gamma_2$ 的半徑 $=\frac{1}{2}\overline{AC}$，

所以 $\overline{PQ}\le\overline{PM}+\overline{MN}+\overline{NQ}=\frac{1}{2}\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{BC}+\frac{1}{2}\overline{AC}=\triangle ABC$ 的半周長，證畢。

1-3 某日，<u>摩卡</u>與<u>花花</u>在直線跑道的兩端（假設端點分別為 A、B）對峙。<u>摩卡</u>以等速從 A 點跑到 B 點後，馬上再以同樣的速率折返跑回 A 點。<u>花花</u>則是以等速從 B 點跑到 A 點後，馬上再以同樣的速率折返跑回 B 點（牠們兩貓的速率不同）。已知牠們第一次交會時，距離 B 點 20 公尺，而牠們都折返後發生第二次交會時，距離 A 點 10 公尺。請問：這條直線跑道長度為何？

答：50 公尺。

解：

假設跑道長度為 x 公尺，<u>摩卡</u>與<u>花花</u>分別費了時間 t_1、t_2 交會第一次、第二次。

則<u>摩卡</u>與<u>花花</u>第一次交會時，<u>摩卡</u>跑了 $x-20$ 公尺，<u>花花</u>跑了 20 公尺。

<u>摩卡</u>與<u>花花</u>第二次交會時，<u>摩卡</u>又跑了 $20+(x-10)=x+10$ 公尺，

而<u>花花</u>又跑了 $(x-20)+10=x-10$ 公尺。

因為<u>摩卡</u>與<u>花花</u>都維持同樣的速率，所以 $\dfrac{x-20}{t_1}=\dfrac{x+10}{t_2}$ 且 $\dfrac{20}{t_1}=\dfrac{x-10}{t_2}$。

故 $(x-20):(x+10)=20:(x-10)\Rightarrow(x-20)(x-10)=20(x+10)$

$\Rightarrow x^2-50x=0\Rightarrow x=0$（不合）或 50。

1-4 有三正整數 a,b,c。將 a 除以 b 會得到一商數 q_1 與一餘數 r_1；將 b 除以 c 會得到一商數 q_2 與一餘數 r_2；將 a 除以 c 會得到一商數 q_3 與一餘數 r_3。

請證明：若 $q_1>2r_1$ 且 $q_2>2r_2$，則必有 $q_3>2r_3$。

解：

根據題目敘述與除法原理可知 $a=bq_1+r_1$、$b=cq_2+r_2$。

於是 $a=bq_1+r_1=(cq_2+r_2)q_1+r_1=c(q_1q_2)+(q_1r_2+r_1)$，

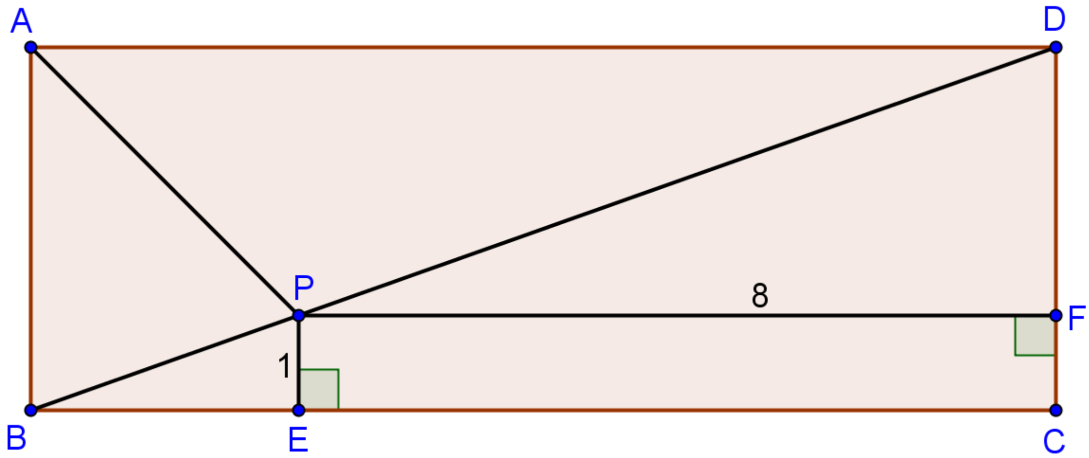
因為 a 除以 c 得到的餘數為 r_3，所以 $r_3\le q_1r_2+r_1$，故 $q_1q_2\le q_3$。

所以 $q_3-2r_3\ge q_1q_2-2(q_1r_2+r_1)=q_1(q_2-2r_2)-2r_1$

$\ge q_1\cdot 1-2r_1>0$，故 $q_3>2r_3$，證畢。

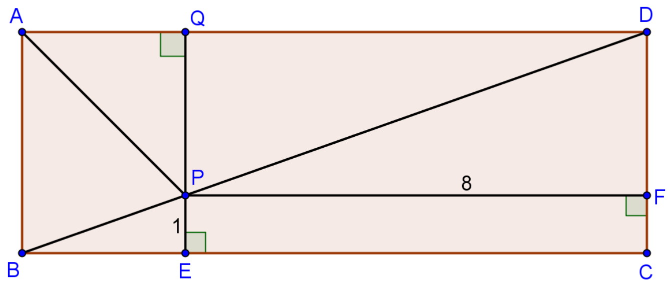
1-5　如下圖，已知 $ABCD$ 為矩形。作 $\angle A$ 的內角平分線交對角線 $\overline{BD}$ 於點 P。

若 P 點到 $\overline{BC}$ 、$\overline{CD}$ 的距離分別為 1、8，試求 $\overline{BC}$ 與 $\overline{CD}$ 的長度。



答：$\overline{BC}=2\sqrt{2}+8$ 、$\overline{CD}=2\sqrt{2}+1$ 。

解：



延長 $\overline{EP}$ 交 $\overline{AD}$ 於點 Q。

因為 $\overline{AP}$ 平分 $\angle A$，

所以 $\angle PAQ=45^\circ$ ，

故 $\triangle APQ$ 為等腰直角三角形 $\Rightarrow \overline{DF}=\overline{PQ}=\overline{AQ}=\overline{BE}$ 。

假設 $\overline{DF}=\overline{BE}=x$ ，

由 $\triangle DPF \sim \triangle PBE$ 可知 $\dfrac{\overline{DF}}{\overline{PF}}=\dfrac{\overline{PE}}{\overline{BE}} \Rightarrow \dfrac{x}{8}=\dfrac{1}{x} \Rightarrow x^2=8 \Rightarrow x=2\sqrt{2}$ 。

故 $\overline{BC}=\overline{BE}+\overline{PF}=2\sqrt{2}+8$ 、$\overline{CD}=\overline{DF}+\overline{PE}=2\sqrt{2}+1$。。

1-6　已知正實數x, y滿足$x+y\le 2$，請證明：$\dfrac{x}{xy+y}+\dfrac{y}{xy+x}\ge 1$。

解：

由算幾不等式可知$\sqrt{xy}\le\dfrac{x+y}{2}\le\dfrac{2}{2}=1$。

所以左式$=\dfrac{x}{xy+y}+\dfrac{y}{xy+x}=\dfrac{x}{\sqrt{xy}\cdot\sqrt{xy}+y}+\dfrac{y}{\sqrt{xy}\cdot\sqrt{xy}+x}$

$$\ge\frac{x}{\frac{x+y}{2}\cdot 1+y}+\frac{y}{\frac{x+y}{2}\cdot 1+x}=\frac{2x}{x+3y}+\frac{2y}{3x+y}$$ 。

於是左式$-$右式$\ge\dfrac{2x}{x+3y}+\dfrac{2y}{3x+y}-1$

$$=\frac{2x(3x+y)+2y(x+3y)-(x+3y)(3x+y)}{(x+3y)(3x+y)}$$

$$=\frac{3x^2-6xy+3y^2}{(x+3y)(3x+y)}=\frac{3(x-y)^2}{(x+3y)(3x+y)}\ge 0$$ ，

故左式$\ge$右式，即$\dfrac{x}{xy+y}+\dfrac{y}{xy+x}\ge 1$，證畢。

另解：

令$\alpha=\dfrac{1}{x}$、$\beta=\dfrac{1}{y}$，則$x+y\le 2\Rightarrow 2\ge\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\ge 2\sqrt{\dfrac{1}{\alpha}\cdot\dfrac{1}{\beta}}\Rightarrow\alpha\beta\ge 1$。

所以$\dfrac{x}{xy+y}+\dfrac{y}{xy+x}=\dfrac{\frac{1}{\alpha}}{\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta}}+\dfrac{\frac{1}{\beta}}{\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha}}=\dfrac{\beta}{1+\alpha}+\dfrac{\alpha}{1+\beta}$

$$=\frac{\beta(1+\beta)+\alpha(1+\alpha)}{(1+\alpha)(1+\beta)}=\frac{(\alpha^2+\beta^2)+(\alpha+\beta)}{(1+\alpha\beta)+(\alpha+\beta)}$$

$$\ge\frac{2\sqrt{\alpha^2\cdot\beta^2}+(\alpha+\beta)}{(1+\alpha\beta)+(\alpha+\beta)}=\frac{2\alpha\beta+(\alpha+\beta)}{(1+\alpha\beta)+(\alpha+\beta)}$$

$$=\frac{(\alpha\beta+\alpha\beta)+(\alpha+\beta)}{(1+\alpha\beta)+(\alpha+\beta)}\ge\frac{(1+\alpha\beta)+(\alpha+\beta)}{(1+\alpha\beta)+(\alpha+\beta)}=1$$ ，證畢。