

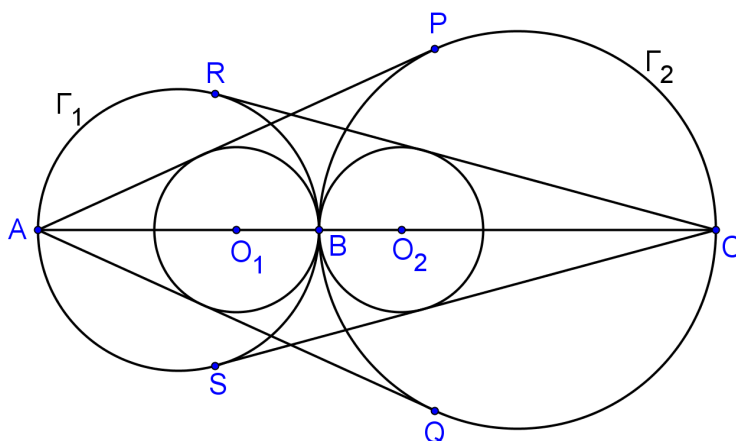
北一女中 103 學年度下學期《數戰數決》有獎徵答活動

第六期題目：

2015 年 06 月 12 日下午 1 點鐘截止

- 6-1 如下圖，直線上依序有相異三點 A 、 B 、 C ，以 \overline{AB} 為直徑作一圓 Γ_1 、以 \overline{BC} 為直徑作一圓 Γ_2 。由點 A 引 Γ_2 的兩切線段 \overline{AP} 、 \overline{AQ} ；由點 C 引 Γ_1 的兩切線段 \overline{CR} 、 \overline{CS} 。作一圓 O_1 與 \overline{AP} 、 \overline{AQ} 相切，且與 Γ_1 內切；再作一圓 O_2 與 \overline{CR} 、 \overline{CS} 相切，且與 Γ_2 內切。

請證明：圓 O_1 與圓 O_2 的半徑相等。



- 6-2 請解出聯立方程式
$$\begin{cases} x = \sqrt{2y+3} \\ y = \sqrt{2z+3} \\ z = \sqrt{2x+3} \end{cases}$$
 的所有實數解。

- 6-3 對一個二位數而言，如果它是九九乘法表中某一道算式的答案，我們就稱這個二位數為「好數」。

例如：因為 $5 \times 9 = 45$ 、 $2 \times 7 = 14$ ，所以 45、14 都是「好數」；

但 65、41 就不是「好數」；

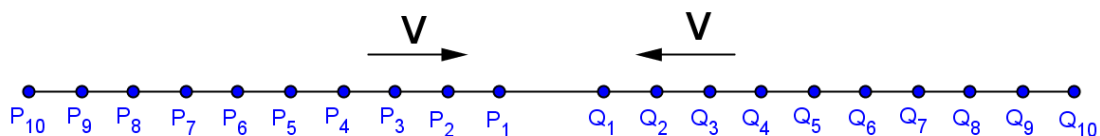
而雖然 $3 \times 3 = 9$ ，但 9 不是二位數，所以 9 也不是「好數」。

請找出所有滿足以下條件的九位數 N ：

N 包含數字 1 至 9 且 1 至 9 均各出現 1 次，

而且任意相鄰兩位（不能交換位置）都是「好數」。

- 6-4 假設綠園裡有 10 隻黑貓 P_1, P_2, \dots, P_{10} 以及 10 隻花貓 Q_1, Q_2, \dots, Q_{10} 依序站在長條欄杆上，如下圖。一開始，黑貓軍團每一隻貓以相同的速率 v 往花貓軍團的方向前進，花貓軍團每一隻貓也以相同的速率 v 往黑貓軍團的方向前進。但只要任何兩隻貓碰頭，這兩隻貓就同時轉回頭往反方向以速率 v 行走。如果有貓走到欄杆末端沒路走了，就跳下欄杆。請問，直到所有的貓都跳下長條欄杆時，貓兩兩的碰頭次數總共有幾次？



- 6-5 小綠在 8×8 的方格表中，第 1 列從左到右填入 1 至 8，第 2 列從左到右填入 9 至 16，……，以此類推，直到第 8 列從左到右填入 57 至 64。（如右圖）

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

接著小綠在這 64 個數前面加上正號或負號，使得方格表每行每列都恰有 4 個正數與 4 個負數。試證明：
不論小綠怎麼填，這 64 個數的總和必為 0。

- 6-6 如右圖，已知 $ABCD$ 為圓外切四邊形，且 $ABCD$ 的內切圓半徑為 3。將直線 AB 、 BC 、 CD 、 DA 延長而且作 4 個圓分別與這 4 條直線中的 3 條相切：
與直線 AB 、 CD 、 DA 相切的圓半徑為 1；
與直線 BC 、 CD 、 DA 相切的圓半徑為 2；
與直線 AB 、 BC 、 DA 相切的圓半徑為 4；
與直線 AB 、 BC 、 CD 相切的圓半徑為 R 。
試求 R 的值。

