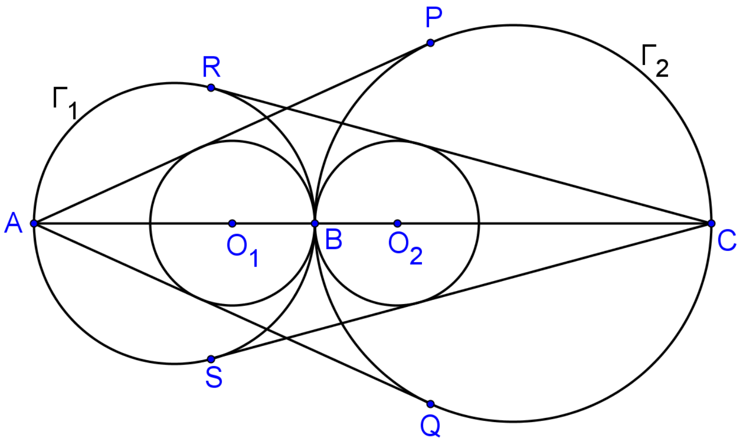
北一女中 103 學年度下學期《數戰數決》有獎徵答活動

第六期題目：

2015 年 06 月 12 日下午 1 點鐘截止

6-1 如下圖，直線上依序有相異三點 A、B、C，以 $\overline{AB}$ 為直徑作一圓 Γ_1 、以 $\overline{BC}$ 為直徑作一圓 Γ_2 。由點 A 引 Γ_2 的兩切線段 $\overline{AP}$ 、 $\overline{AQ}$ ；由點 C 引 Γ_1 的兩切線段 $\overline{CR}$、$\overline{CS}$。作一圓 O_1 與 $\overline{AP}$、$\overline{AQ}$ 相切，且與 Γ_1 內切；再作一圓 O_2 與 $\overline{CR}$、$\overline{CS}$ 相切，且與 Γ_2 內切。

請證明：圓 O_1 與圓 O_2 的半徑相等。

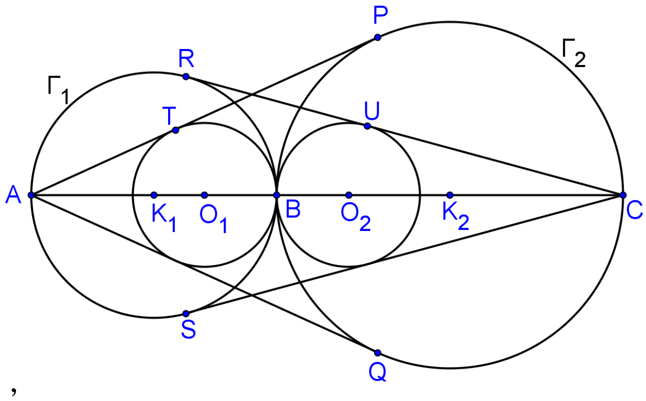


解：

如右圖，假設 $\overline{AP}$ 與圓 O_1 切於點 T；

$\overline{CR}$ 與圓 O_2 切於點 U；

再令 Γ_1 、 Γ_2 的圓心分別為 K_1 、 K_2 ，半徑分別為 R_1 、 R_2 。



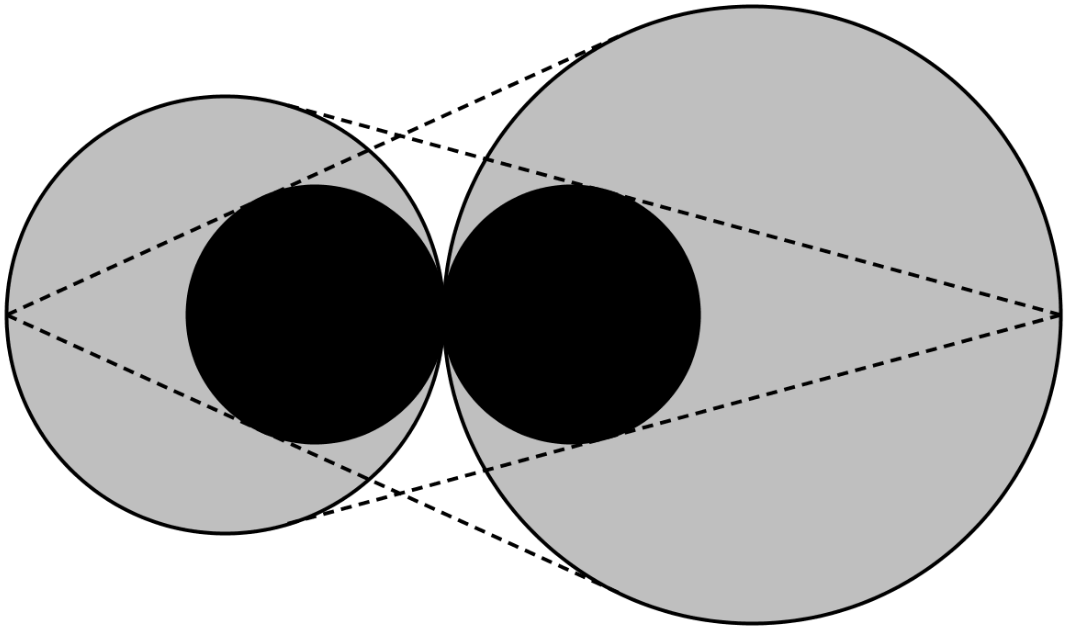
定義 $r=\overline{O_1T}$ ，則 $\overline{O_1T}\perp\overline{AP}$ 、 $\overline{K_2P}\perp\overline{AP}$ ，

所以 $\triangle ATO_1 \sim \triangle APK_2 \Rightarrow \dfrac{\overline{O_1T}}{\overline{O_1A}}=\dfrac{\overline{K_2P}}{\overline{K_2A}} \Rightarrow \dfrac{r}{2R_1-r}=\dfrac{R_2}{2R_1+R_2}$ ，

由此可解得 $\overline{O_1T}=r=\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}$ ，同理可證明 $\overline{O_2U}=\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}$ ，

故圓 O_1 與圓 O_2 的半徑相等。。

【註】 本題俗稱「鬥雞眼定理」(*Squinting Eyes theorem*),



6-2 請解出聯立方程式$\begin{cases} x=\sqrt{2y+3} \\ y=\sqrt{2z+3} \\ z=\sqrt{2x+3} \end{cases}$的所有實數解。

答:$(x,y,z)=(3,3,3)$。

解:

顯然$x,y,z\geq 0$。

由方程組的輪換性,可不妨假設x是x,y,z中最大的數,亦即$x\geq y$且$x\geq z$。

因為$x\geq y$,所以$z=\sqrt{2x+3}\geq\sqrt{2y+3}=x$。

又$x\geq z$,所以$x=z$,於是$z=\sqrt{2x+3}=\sqrt{2z+3}=y$,故$x=y=z$。

解方程式:$x=\sqrt{2y+3}=\sqrt{2x+3}\Rightarrow x^2=2x+3\Rightarrow x^2-2x-3=0$

$\Rightarrow (x-3)(x+1)=0\Rightarrow x=3$或$-1$(不合),

所以$x=y=z=3$,代回方程組檢驗亦符合,故$(x,y,z)=(3,3,3)$。

6-3 對一個二位數而言，如果它是九九乘法表中某一道算式的答案，我們就稱這個二位數為「好數」。

例如： 因為 $5\times9=45$、$2\times7=14$，所以 45、14 都是「好數」；

但 65、41 就不是「好數」；

而雖然 $3\times3=9$，但 9 不是二位數，所以 9 也不是「好數」。

請找出所有滿足以下條件的九位數 N：

N 包含數字 1 至 9 且 1 至 9 均各出現 1 次，

而且任意相鄰兩位（不能交換位置）都是「好數」。

答：728163549。

解：

先繪製一張圖，有 9 個頂點標上 1 至 9。

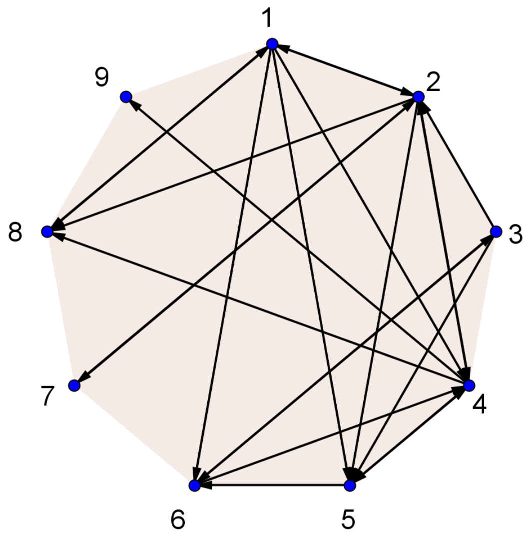
若二位數「ab」是「好數」，

則畫一個箭頭由 a 指向 b，如右圖。

由此圖可看出，49 必為 N 的末兩位，

如此一來，27 就不能是 N 的末兩位，

那麼 72 就一定是 N 的首兩位。。



另外：

8 不是 N 的末位，所以 1 必接在 8 之後。

3 不是 N 的首位，所以 6 必排在 3 之前。

於是 $N=72\,(\underline{x})\,(\underline{y})\,(\underline{z})\,49$，其中$(\underline{x})\,(\underline{y})\,(\underline{z})$三個空位只能填入 81、63、5。

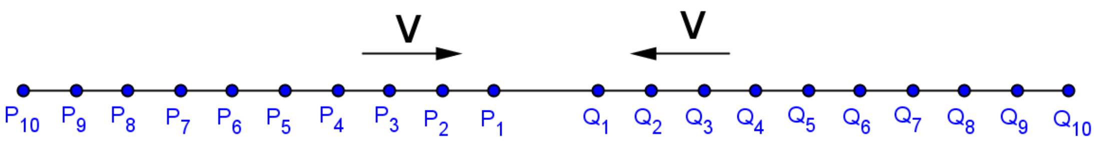
且 2 後面只能接 81 或 5，而 4 前面只能排 81 或 5，

所以當$(\underline{x})$填入 81 時，$(\underline{z})$只能 5，此時$(\underline{y})$只能填入 63，於是 $N=728163549$。

當$(\underline{x})$填入 5 時，$(\underline{z})$只能 81，此時$(\underline{y})$只能填入 63，但 38 不是「好數」。

由上述討論可知 $N=728163549$ 是唯一滿足題目條件的九位數。

6-4 假設綠園裡有 10 隻黑貓 $P_1, P_2, \cdots\cdots, P_{10}$ 以及 10 隻花貓 $Q_1, Q_2, \cdots\cdots, Q_{10}$ 依序站在長條欄杆上，如下圖。一開始，黑貓軍團每一隻貓以相同的速率 v 往花貓軍團的方向前進，花貓軍團每一隻貓也以相同的速率 v 往黑貓軍團的方向前進。但只要任何兩隻貓碰頭，這兩隻貓就同時轉回頭往反方向以速率 v 行走。如果有貓走到欄杆末端沒路走了，就跳下欄杆。請問，直到所有的貓都跳下長條欄杆時，貓兩兩的碰頭次數總共有幾次？



答：100 次。

解：

我們定義某隻貓跟左邊的貓碰頭稱為「左碰頭」，

跟右邊的貓碰頭稱為「右碰頭」，其中左右方向定義如題中之圖。

考慮 P_{10}：他要跳下欄杆一定是與 P_9 右碰頭後轉回頭，所以 P_{10} 總共碰頭 1 次。

接著考慮 P_9：他要跳下欄杆，一定是先與 P_8 右碰頭，

回頭後再與 P_{10} 左碰頭，再回頭與 P_8 右碰頭，

接著回頭後就可以跳下欄杆，所以 P_9 總共碰頭 3 次。

以此類推，可以知道對 P_{11-k} 而言，他必須右碰頭 k 次、左碰頭 $k-1$ 次，才會跳下欄杆，所以他總共碰頭 $2k-1$ 次。

同理，對 Q_{11-k} 而言，他必須左碰頭 k 次、右碰頭 $k-1$ 次，才會跳下欄杆，

所以他也總共碰頭 $2k-1$ 次。

又因為兩隻貓的一次碰頭，會使得這兩隻貓各得到一次碰頭（一左一右），

$$\text{所以總碰頭次數} = \frac{\sum_{k=1}^{10}(2k-1)+\sum_{k=1}^{10}(2k-1)}{2}$$

$$= \sum_{k=1}^{10}(2k-1) = 2\sum_{k=1}^{10}k - \sum_{k=1}^{10}1 = 2\times\frac{10\times 11}{2} - 10 = 100\text{。}$$

另解：

如果將兩隻貓的碰頭折返而行，視為兩隻貓互相穿身而過，

那麼每隻黑貓與每隻花貓都會互相穿身而過而跳下欄杆的另一端，

所以所有貓的碰頭次數 $= 10\times 10 = 100$。

6-5 小綠在8×8的方格表中，第 1 列從左到右填入 1 至 8，第 2 列從左到右填入 9 至 16，……，以此類推，直到第 8 列從左到右填入 57 至 64。（如右圖）

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
9	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
17	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
25	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**
33	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
41	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**
49	**50**	**51**	**52**	**53**	**54**	**55**	**56**
57	**58**	**59**	**60**	**61**	**62**	**63**	**64**

接著小綠在這 64 個數前面加上正號或負號，使得方格表每行每列都恰有 4 個正數與 4 個負數。試證明：

不論小綠怎麼填，這 64 個數的總和必為 0。

解：

第 1 列第 j 行的數為 j，且往下移 1 行，數值就增加 8，

所以第 i 列第 j 行的數為 $j+8\cdot(i-1)=8i+j-8$。

小綠在這 64 個數前面加上正號或負號之後，格內的數為$8i+j-8$ 或$-8i-j+8$，

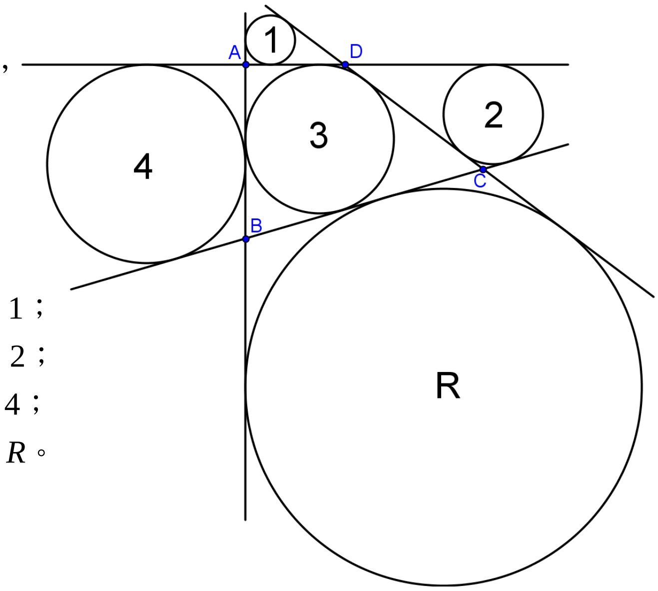
因為每行每列都恰有 4 個正數與 4 個負數，

所以對每個 i（$1\le i\le 8$）而言，$8i$ 與$-8i$ 都恰好各出現 4 次，

對每個 j（$1\le j\le 8$）而言，$j-8$與$-j+8$也都恰好各出現 4 次，

所以這 64 個數的總和必為 0。

6-6 如右圖，已知 $ABCD$ 為圓外切四邊形，且 $ABCD$ 的內切圓半徑為 3。將直線 AB、BC、CD、DA 延長而且作 4 個圓分別與這 4 條直線中的 3 條相切：
與直線 AB、CD、DA 相切的圓半徑為 1；
與直線 BC、CD、DA 相切的圓半徑為 2；
與直線 AB、BC、DA 相切的圓半徑為 4；
與直線 AB、BC、CD 相切的圓半徑為 R。
試求 R 的值。



答：8。

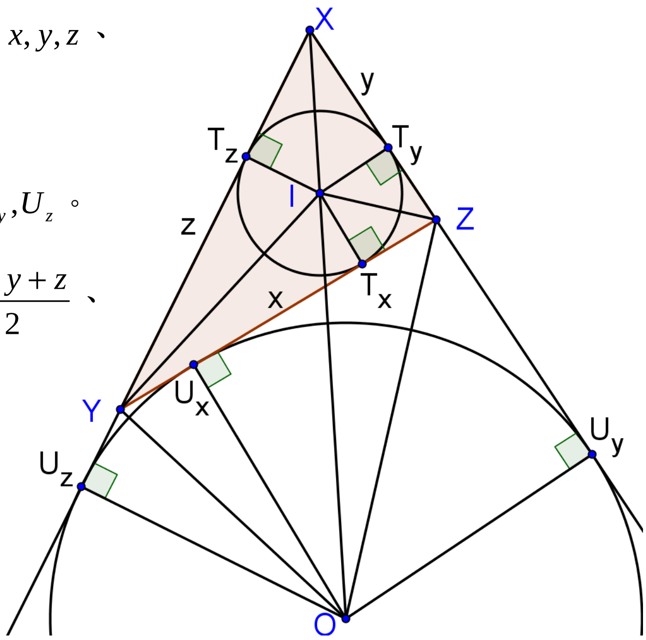
解：

引理：如右圖，假設△XYZ 的三邊長分別為 x,y,z、內切圓與三邊分別切於點 T_x,T_y,T_z；與 $\overline{YZ}$ 相切的旁切圓與三邊分別切於點 U_x,U_y,U_z。

則 $\overline{XT_y}=\overline{XT_z}=\dfrac{y+z-x}{2}$、$\overline{XU_y}=\overline{XU_z}=\dfrac{x+y+z}{2}$、

$\overline{YU_x}=\overline{YU_z}=\overline{ZT_x}=\overline{ZT_y}=\dfrac{x+y-z}{2}$、

$\overline{ZU_x}=\overline{ZU_y}=\overline{YT_x}=\overline{YT_z}=\dfrac{z+x-y}{2}$。



引理證明：

由圓外一點引圓的兩切線段等長，

所以 $\overline{XT_y}=\overline{XT_z}$、$\overline{XU_y}=\overline{XU_z}$、$\overline{YT_x}=\overline{YT_z}$、$\overline{ZT_x}=\overline{ZT_y}$、$\overline{YU_x}=\overline{YU_z}$、$\overline{ZU_x}=\overline{ZU_y}$，

且 $x=\overline{YT_x}+\overline{ZT_x}=\overline{YU_x}+\overline{ZU_x}$、$y=\overline{XT_y}+\overline{ZT_y}$、$z=\overline{XT_z}+\overline{YT_z}$，

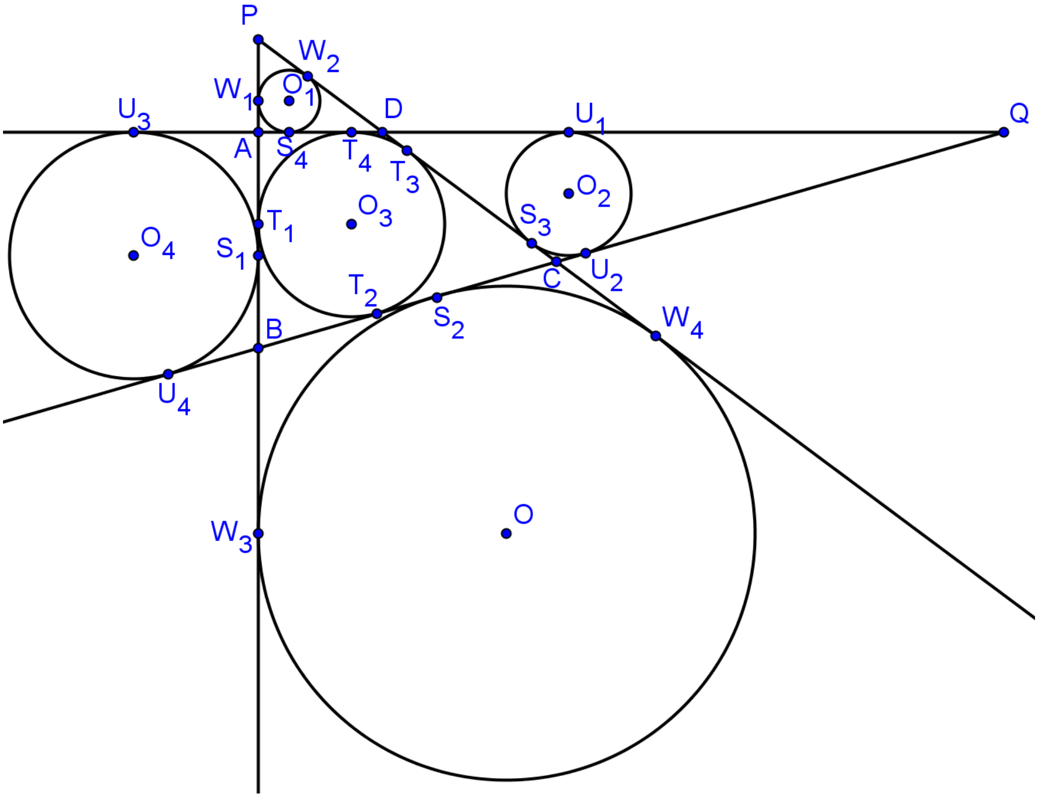
故 $\overline{XT_y}=\overline{XT_z}=\dfrac{\overline{XT_y}+\overline{XT_z}}{2}=\dfrac{\overline{XY}+\overline{XZ}-\overline{YT_z}-\overline{ZT_y}}{2}=\dfrac{z+y-\overline{YT_x}-\overline{ZT_x}}{2}=\dfrac{y+z-x}{2}$；

$\overline{XU_y}=\overline{XU_z}=\dfrac{\overline{XU_y}+\overline{XU_z}}{2}=\dfrac{\overline{XY}+\overline{XZ}+\overline{YU_z}+\overline{ZU_y}}{2}=\dfrac{z+y+\overline{YU_x}+\overline{ZU_x}}{2}=\dfrac{x+y+z}{2}$；

$\overline{YU_x}=\overline{YU_z}=\overline{XU_z}-\overline{XY}=\dfrac{x+y+z}{2}-z=\dfrac{x+y-z}{2}$，

利用同樣的方法可證明引理的其他結論。

現在回到原題目，假設直線 AB、CD 交於點 P；直線 BC、DA 交於點 Q；且各圓心與切點符號均如下圖所示。



對$\triangle PAD$ 而言，O_1 為其內切圓、圓 O_3 為其旁切圓；
對$\triangle PBC$ 而言，O_3 為其內切圓、圓 O 為其旁切圓；
對$\triangle QCD$ 而言，O_2 為其內切圓、圓 O_3 為其旁切圓；
對$\triangle QAB$ 而言，O_3 為其內切圓、圓 O_4 為其旁切圓。

由引理可假設 $\overline{AW_1}=\overline{AS_4}=\overline{DT_4}=\overline{DT_3}=\overline{CS_3}=\overline{CU_2}=x$；

$$\overline{DW_2}=\overline{DS_4}=\overline{AT_4}=\overline{AT_1}=\overline{BS_1}=\overline{BU_4}=y\text{。}$$

因為 O_1,D,O_2 共線，且 $\overline{O_1S_4},\overline{O_2U_1}$ 均與 $\overline{S_4U_1}$ 垂直，

所以$\triangle O_1S_4D\sim\triangle O_2U_1D\Rightarrow\dfrac{\overline{S_4D}}{\overline{O_1S_4}}=\dfrac{\overline{U_1D}}{\overline{O_2U_1}}\Rightarrow\dfrac{y}{1}=\dfrac{\overline{U_1D}}{2}\Rightarrow\overline{U_1D}=2y$。

故 $2y=\overline{U_1D}=\overline{DS_3}=\overline{CT_3}=\overline{CT_2}=\overline{BS_2}\Rightarrow\overline{BS_2}=2y$。

又因為 O_4,B,O 共線，且 $\overline{O_4U_4},\overline{OS_2}$ 均與 $\overline{U_4S_2}$ 垂直，

所以$\triangle O_4U_4B\sim\triangle OS_2B\Rightarrow\dfrac{\overline{U_4B}}{\overline{O_4U_4}}=\dfrac{\overline{S_2B}}{\overline{OS_2}}\Rightarrow\dfrac{y}{4}=\dfrac{2y}{R}\Rightarrow R=8$。

【註】　本題圖形的其他線段長度亦可求出，如下圖。