北一女中 103 學年度下學期《數戰數決》有獎徵答活動

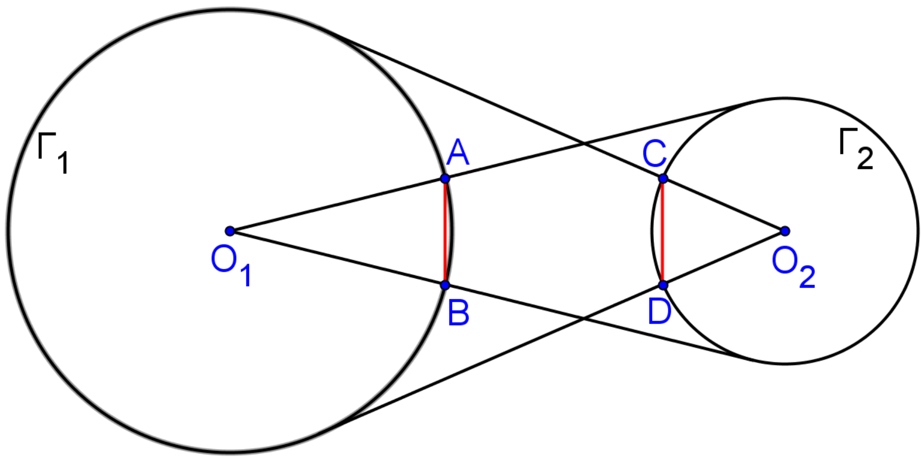
第五期題目：

2015 年 05 月 01 日下午 1 點鐘截止

5-1 小綠解 2 個四次多項式方程式：$P(x)=2x^4-26x^3+ax^2+bx+c=0$ 以及 $Q(x)=3x^4-48x^3+dx^2+ex+f=0$。小綠將這 8 個方程式的根列出，發現只有 1、2、3、4、5 這五個不同的數，試求 $P(0)\cdot Q(0)$ 之值。

5-2 如下圖：平面上兩圓 Γ_1、Γ_2，其圓心分別為 O_1、O_2，且點 O_1 在圓 Γ_2 外部，點 O_2 在圓 Γ_1 外部。過點 O_1 向圓 Γ_2 作兩切線，分別交圓 Γ_1 於點 A、B；再過點 O_2 向圓 Γ_1 作兩切線，分別交圓 Γ_2 於點 C、D。

連接 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$，請證明：$\overline{AB}=\overline{CD}$。



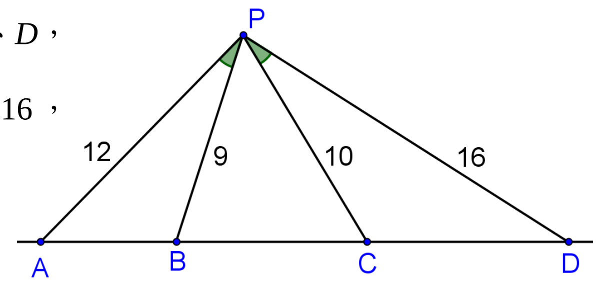
5-3 如下圖，將正整數 1 至 10000 依序排成 100×100 的陣列（100 行 100 列）。

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & 100 \\ 101 & 102 & 103 & \cdots & 200 \\ 201 & 202 & 203 & \cdots & 300 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 9901 & 9902 & 9903 & \cdots & 10000 \end{array}$$

小綠從陣列中選取 100 個數，而且這 100 個數必須兩兩不同行、也兩兩不同列。最後小綠將選取的 100 個數加總後得到 S，試求 S 的最大可能值。

5-4 將$(\frac{1\times4+\sqrt{2}}{2\times2-2})\times(\frac{2\times5+\sqrt{2}}{3\times3-2})\times(\frac{3\times6+\sqrt{2}}{4\times4-2})\times\cdots\cdots\times(\frac{2015\times2018+\sqrt{2}}{2016\times2016-2})$化簡成最簡根式，可得 $p+q\sqrt{2}$ ，其中 p,q 是有理數。試求數對(p,q) 。

5-5 如右圖，平面上有一直線 L 以及線外一點 P。若直線 L 上有 4 個點，依序為 A、B、C、D，滿足 $\overline{PA}=12$ 、 $\overline{PB}=9$ 、 $\overline{PC}=10$ 、 $\overline{PD}=16$ ，而且 $\angle APB=\angle CPD$ 。試求三線段比例 $\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CD}$ 。



5-6 小綠在黑板上寫一個數列$\langle a_k\rangle$，規則如下：

(1) $a_1=n$ ，其中 n 為某個正整數。
(2) 當 $a_k>5$ 時，
若其個位數字為$0,1,2,3,4,5$ ，則將a_k 的個位數字刪去得到a_{k+1} 。
若其個位數字為$6,7,8,9$ ，則將a_k 乘以 9 倍得到a_{k+1} 。
(3) 若a_k 就是$1,2,3,4,5$其中之一，則小綠就寫到a_k 為止。

例如： $n=314159$時，小綠寫的數列為：

$\underbrace{314159,2827431}_{\times9},282743,28274,\underbrace{2827,25443}_{\times9},2544,254,25,2$ （結束）。

請證明：不論 n 值為何，小綠不可能無止盡地寫下去。