北一女中 103 學年度下學期《數戰數決》有獎徵答活動

第五期題目：

2015 年 05 月 01 日下午 1 點鐘截止

5-1 小綠解 2 個四次多項式方程式：$P(x)=2x^4-26x^3+ax^2+bx+c=0$ 以及 $Q(x)=3x^4-48x^3+dx^2+ex+f=0$。小綠將這 8 個方程式的根列出，發現只有 1、2、3、4、5 這五個不同的數，試求 $P(0)\cdot Q(0)$ 之值。

答：72000

解：

假設 $P(x)=0$ 的根為 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$、$Q(x)=0$ 的根為 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$，

則由根與係數關係可知

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=-\dfrac{-26}{2}=13$、$\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4=-\dfrac{-48}{3}=16$。

於是 8 個根的和為 29。

再假設 8 個根為 $1,2,3,4,5,z_1,z_2,z_3$，其中 z_1,z_2,z_3 都是 $1,2,3,4,5$ 其中之一。

所以 $1+2+3+4+5+z_1+z_2+z_3=8$ 個根之和 $=29\Rightarrow z_1+z_2+z_3=14$，

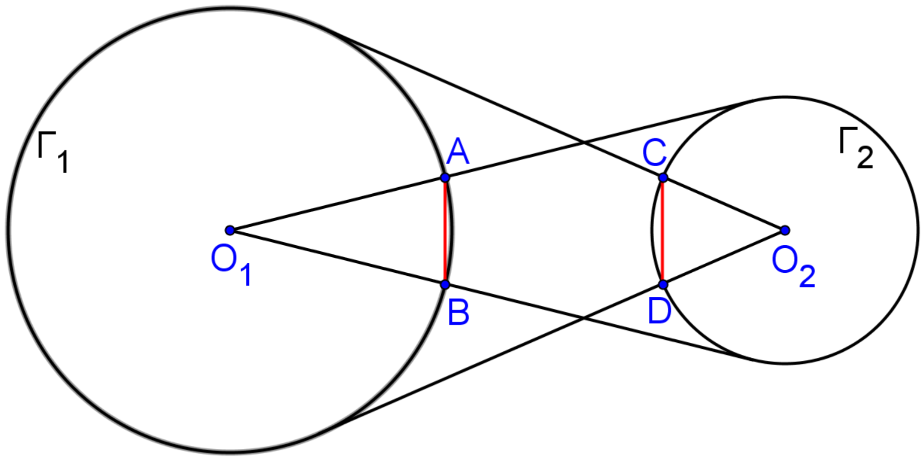
於是 z_1,z_2,z_3 必定其中兩數為 5、一數為 4。

$$
\begin{aligned}
\text{故 } P(x)\cdot Q(x)&=2(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)\cdot 3(x-\beta_1)(x-\beta_2)(x-\beta_3)(x-\beta_4)\\
&=6(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-z_1)(x-z_2)(x-z_3)\\
&=6(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-5)(x-5)(x-4)\\
&=6(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)^2(x-5)^3
\end{aligned}
$$
。

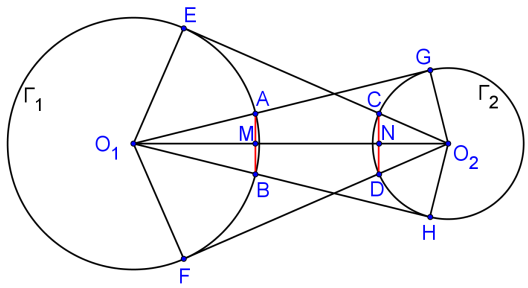
將 $x=0$ 代入上式即得 $P(0)\cdot Q(0)=6(-1)(-2)(-3)(-4)^2(-5)^3=72000$。

5-2 如下圖：平面上兩圓Γ_1、Γ_2，其圓心分別為O_1、O_2，且點O_1在圓Γ_2外部，點O_2在圓Γ_1外部。過點O_1向圓Γ_2作兩切線，分別交圓Γ_1於點A、B；再過點O_2向圓Γ_1作兩切線，分別交圓Γ_2於點C、D。

連接$\overline{AB}$、$\overline{CD}$，請證明：$\overline{AB}=\overline{CD}$。



解：



如右圖，連接$\overline{O_1O_2}$，

假設$\overline{O_1O_2}$分別與$\overline{AB}$、$\overline{CD}$交於點M、N。

再假設$\overleftrightarrow{O_1A}$、$\overleftrightarrow{O_1B}$分別與圓$\Gamma_2$切於點$G$、$H$；

而$\overleftrightarrow{O_2C}$、$\overleftrightarrow{O_2D}$分別與圓$\Gamma_1$切於點$E$、$F$。

連接$\overline{O_1E}$、$\overline{O_1F}$、$\overline{O_2G}$、$\overline{O_2H}$。

因為$\overleftrightarrow{O_2C}$、$\overleftrightarrow{O_2D}$分別與圓$\Gamma_1$切於點$E$、$F$，所以$\overline{O_2E}=\overline{O_2F}$。

又$\overline{O_1E}=\overline{O_1F}$、且$\overline{O_1O_2}=\overline{O_1O_2}$，

所以$\triangle O_1O_2E\cong\triangle O_1O_2F\Rightarrow\angle CO_2N=\angle DO_2N$。

因為$\angle CO_2N=\angle DO_2N$、$\overline{O_2C}=\overline{O_2D}$、$\overline{O_2N}=\overline{O_2N}$，

所以$\triangle CO_2N\cong\triangle DO_2N\Rightarrow\angle CNO_2=\angle DNO_2=90^\circ$且$\overline{CN}=\overline{DN}$。

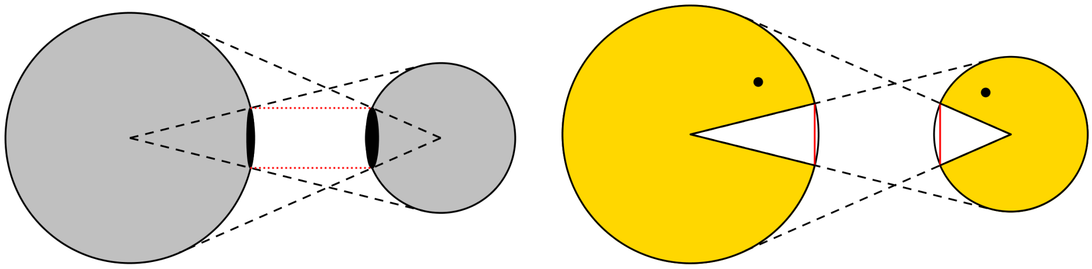
因為$\angle CNO_2=90^\circ=\angle O_1EO_2$且$\angle CO_2N=\angle O_1O_2E$，

所以$\triangle CNO_2\sim\triangle O_1EO_2$

$$\Rightarrow\frac{\overline{CN}}{\overline{O_1E}}=\frac{\overline{O_2C}}{\overline{O_1O_2}}\Rightarrow\overline{CN}=\frac{\overline{O_1E}\cdot\overline{O_2C}}{\overline{O_1O_2}}=\frac{\overline{O_1A}\cdot\overline{O_2C}}{\overline{O_1O_2}}\Rightarrow\overline{CD}=2\overline{CN}=\frac{2\cdot\overline{O_1A}\cdot\overline{O_2C}}{\overline{O_1O_2}}。$$

同理可證$\overline{AB}=\dfrac{2\cdot\overline{O_1A}\cdot\overline{O_2C}}{\overline{O_1O_2}}$，故$\overline{AB}=\overline{CD}$。

【註】　本題俗稱「眼球定理」(*Eyeball Theorem*)，
因為圖形像兩個眼球對看。(如下圖左)
也有人說像兩個小精靈互相張嘴，嘴巴打開的寬度相同。(如下圖右)



5-3　如下圖，將正整數 1 至 10000 依序排成 100×100 的陣列（100 行 100 列）。

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & 100 \\ 101 & 102 & 103 & \cdots & 200 \\ 201 & 202 & 203 & \cdots & 300 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 9901 & 9902 & 9903 & \cdots & 10000 \end{array}$$

小綠從陣列中選取 100 個數，而且這 100 個數必須兩兩不同行、也兩兩不同列。最後小綠將選取的 100 個數加總後得到 S，試求 S 的最大可能值。

答：500050。

解：

顯然第 1 列第 i 行的數為 i，而往下一列，數就增加 100，
所以第 j 列第 i 行的數為 $i+100(j-1)$。
假設小綠在第 i 行選取的數是在第 a_i 列的，

$$\text{則 } S=\sum_{i=1}^{100}[i+100(a_i-1)]=\sum_{i=1}^{100}i+100\sum_{i=1}^{100}(a_i-1)$$

$$=\sum_{i=1}^{100}i+100\sum_{i=1}^{100}(j-1)$$

$$=\sum_{i=1}^{100}i+100\sum_{k=1}^{99}k$$

$$=\frac{100\times101}{2}+100\times\frac{99\times100}{2}$$

$$=100\times\frac{101+99\times100}{2}=100\times\frac{10001}{2}=500050\text{ 。}$$

5-4 將$(\frac{1\times4+\sqrt{2}}{2\times2-2})\times(\frac{2\times5+\sqrt{2}}{3\times3-2})\times(\frac{3\times6+\sqrt{2}}{4\times4-2})\times\cdots\cdots\times(\frac{2015\times2018+\sqrt{2}}{2016\times2016-2})$化簡成最簡根式，可得$p+q\sqrt{2}$，其中$p,q$是有理數。試求數對$(p,q)$。

答：$(2016,\frac{2015}{2})$。

解：

假設$a_k=\frac{k\times(k+3)+\sqrt{2}}{(k+2)\times(k+2)-2}$。

觀察以下運算：

$a_1=\frac{4+\sqrt{2}}{2}=2+\frac{1}{2}\sqrt{2}$；

$a_1\times a_2=\frac{4+\sqrt{2}}{2}\times\frac{10+\sqrt{2}}{7}=\frac{42+14\sqrt{2}}{14}=3+\sqrt{2}$；

$a_1\times a_2\times a_3=(3+\sqrt{2})\times\frac{18+\sqrt{2}}{14}=\frac{56+21\sqrt{2}}{14}=4+\frac{3}{2}\sqrt{2}$；

$a_1\times a_2\times a_3\times a_4=(4+\frac{3}{2}\sqrt{2})\times\frac{28+\sqrt{2}}{23}=\frac{230+92\sqrt{2}}{46}=5+2\sqrt{2}$；

於是我們可以猜測$a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\cdots\times a_n=(n+1)+\frac{n}{2}\sqrt{2}$（★）。

以下用數學歸納法證明之：

1° 當$n=1$時，$a_1=\frac{4+\sqrt{2}}{2}=2+\frac{1}{2}\sqrt{2}$，（★）成立。

2° 假設當$n=m$時，（★）成立，亦即$a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\cdots\times a_m=(m+1)+\frac{m}{2}\sqrt{2}$。

則當$n=m+1$時，$a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\cdots\times a_m\times a_{m+1}$

$$=[(m+1)+\frac{m}{2}\sqrt{2}]\times\frac{(m+1)(m+4)+\sqrt{2}}{(m+2)(m+2)-2}$$

$$=\frac{(2m+2)+m\sqrt{2}}{2}\times\frac{(m^2+5m+4)+\sqrt{2}}{m^2+4m+2}$$

$$=\frac{(2m^3+12m^2+20m+8)+(m^3+5m^2+6m+2)\sqrt{2}}{2(m^2+4m+2)}$$

$$=(m+2)+\frac{m+1}{2}\sqrt{2}$$，（★）亦成立。

故由數學歸納法原理可知$\forall n\in\mathbb{N}$，（★）均成立。

於是題目之原求值式$=2016+\frac{2015}{2}\sqrt{2}$，即$(p,q)=(2016,\frac{2015}{2})$。

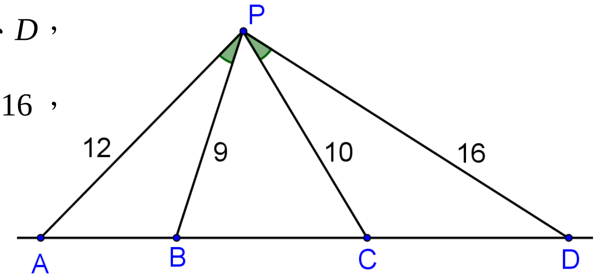
5-5　平面上有一直線 L 以及線外一點 P。

若直線 L 上有 4 個點，依序為 A、B、C、D，

滿足 $\overline{PA}=12$、$\overline{PB}=9$、$\overline{PC}=10$、$\overline{PD}=16$，

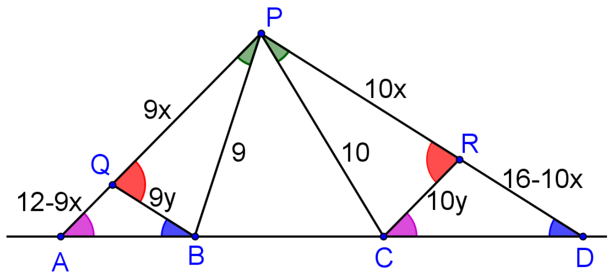
而且 $\angle APB=\angle CPD$。

試求三線段比例 $\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CD}$。



答：$27:38:40$。

解：



過 B 點作 $\overline{PD}$ 的平行線交 $\overline{PA}$ 於點 Q；

過 C 點作 $\overline{PA}$ 的平行線交 $\overline{PD}$ 於點 R。

則 $\angle ABQ=\angle ADP$ 且 $\angle DCR=\angle DAP$（同位角相等），

故 $\angle PQB=\angle PAB+\angle ABQ=\angle RCD+\angle CDR=\angle PRC$，

又因為 $\angle APB=\angle CPD$，所以$\triangle PQB\sim\triangle PRC$（$AA$ 相似）。

因為 $\overline{PB}=9$、$\overline{PC}=10$，故可假設 $\overline{PQ}=9x$、$\overline{BQ}=9y$、$\overline{PR}=10x$、$\overline{CR}=10y$。

於是 $\overline{AQ}=12-9x$、$\overline{DR}=16-10x$。

而又由 $\angle ABQ=\angle ADP$ 且 $\angle DCR=\angle DAP$ 可知$\triangle ABQ\sim\triangle CDR\sim\triangle ADP$，

所以 $\dfrac{\overline{AQ}}{\overline{QB}}=\dfrac{\overline{CR}}{\overline{RD}}=\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PD}}\Rightarrow\dfrac{12-9x}{9y}=\dfrac{10y}{16-10x}=\dfrac{12}{16}=\dfrac{3}{4}$

$$\Rightarrow\begin{cases}48-36x=27y\\40y=48-30x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}12x+9y=16\\15x+20y=24\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{104}{105}\\[2ex] y=\dfrac{16}{35}\end{cases}。$$

故 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AD}}=\dfrac{\overline{AQ}}{\overline{AP}}=\dfrac{12-9x}{12}=1-\dfrac{3}{4}x=\dfrac{9}{35}\Rightarrow\overline{AB}=\dfrac{9}{35}\overline{AD}$，

$\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AD}}=\dfrac{\overline{RD}}{\overline{PD}}=\dfrac{16-10x}{16}=1-\dfrac{5}{8}x=\dfrac{8}{21}\Rightarrow\overline{CD}=\dfrac{8}{21}\overline{AD}$，

$\overline{BC}=\overline{AD}-\overline{AB}-\overline{CD}=\overline{AD}-\dfrac{9}{35}\overline{AD}-\dfrac{8}{21}\overline{AD}=\dfrac{38}{105}\overline{AD}$，

於是 $\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CD}=\dfrac{9}{35}:\dfrac{38}{105}:\dfrac{8}{21}=27:38:40$。

5-6 小綠在黑板上寫一個數列$\langle a_k \rangle$，規則如下：

(1) $a_1 = n$，其中 n 為某個正整數。
(2) 當$a_k > 5$時，
若其個位數字為$0,1,2,3,4,5$，則將a_k的個位數字刪去得到a_{k+1}。
若其個位數字為$6,7,8,9$，則將a_k乘以 9 倍得到a_{k+1}。
(3) 若a_k就是$1,2,3,4,5$其中之一，則小綠就寫到a_k為止。

例如：$n = 314159$時，小綠寫的數列為：

$\underbrace{314159, 2827431}_{\times 9}, 282743, 28274, \underbrace{2827, 25443}_{\times 9}, 2544, 254, 25, 2$（結束）。

請證明：不論 n 值為何，小綠不可能無止盡地寫下去。

解：

反證法：假設某個 n 值會使得小綠無止盡地寫下去。

因為數列$\langle a_k \rangle$所有項都是正整數，所以一定有最小的一項【註】。

假設最小的一項是a_m，意即$\forall k \in \mathbb{N}$，均有$a_m \le a_k$。
因為小綠會無止盡地寫下去，所以$a_m > 5$。

如果a_m的個位數字為$0,1,2,3,4,5$其中之一，

則$a_{m+1} = \dfrac{1}{10}[a_m - (a_m\text{的個位數字})] \le \dfrac{1}{10}a_m < a_m$，矛盾。

如果a_m的個位數字為$6,7,8,9$其中之一，
則$a_{m+1} = 9a_m$的個位數字必定為$4,3,2,1$其中之一，

於是$a_{m+2} = \dfrac{1}{10}[a_{m+1} - (a_{m+1}\text{的個位數字})] < \dfrac{1}{10}a_{m+1} = \dfrac{9}{10}a_m < a_m$，矛盾。

故不論 n 值為何，小綠不可能無止盡地寫下去。

【註】 正整數集合的任意非空子集合一定有最小元素，
稱為「良序原理」（*Well-ordering Principle*）。