

# 北一女中 103 學年度下學期《數戰數決》有獎徵答活動

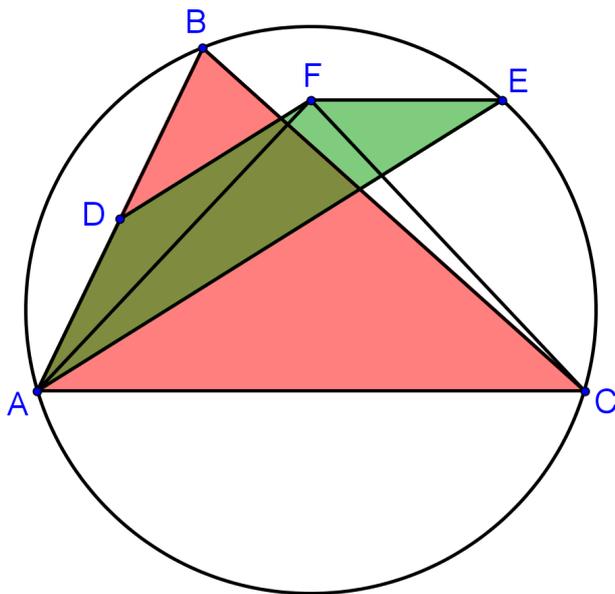
## 第四期題目：

2015 年 03 月 27 日下午 1 點鐘截止

4-1 請找出所有正整數數對  $(a,b)$ ，使得  $\frac{a^3b-1}{a+1}$  與  $\frac{ab^3+1}{b-1}$  都是正整數。

4-2 如下圖，已知  $\triangle ABC$  中， $D$  為  $\overline{AB}$  中點，作  $\angle A$  的內角平分線交  $\triangle ABC$  外接圓於點  $E$ 。再取點  $F$ ，使得  $AEFD$  為等腰梯形，其中  $\overline{DF} \parallel \overline{AE}$ 。

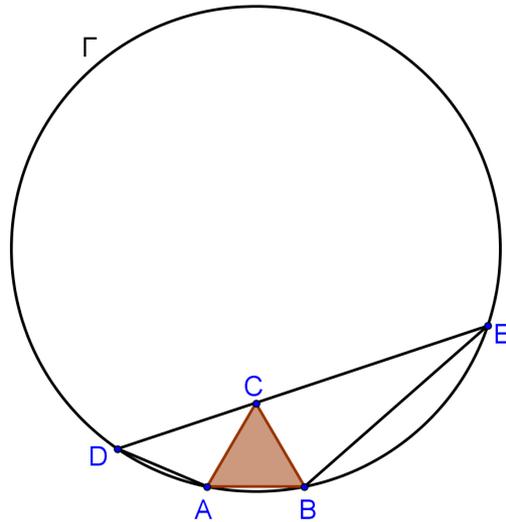
連接  $\overline{AF}$ 、 $\overline{FC}$ ，請證明： $\overline{AF} = \overline{FC}$ 。



4-3 已知  $x$  為正實數，請解下列方程式：

$$x + \sqrt{x(x+1)} + \sqrt{x(x+2)} + \sqrt{(x+1)(x+2)} = 2。$$

- 4-4 如下圖，已知圓 $\Gamma$ 的半徑為1。正三角形 $ABC$ 為的兩頂點 $A$ 、 $B$ 在圓 $\Gamma$ 上， $C$ 為圓 $\Gamma$ 內部一點。在圓 $\Gamma$ 上取異於 $B$ 的點 $D$ ，使得 $\overline{AD} = \overline{AB}$ 。連接直線 $DC$ 與圓 $\Gamma$ 交於點 $E$ 。試求 $\overline{CE}$ 的長度。



- 4-5 小綠將一個 $9 \times 7$ 的方格表（如下圖1），用3方格構成的「L字型方塊」（如下圖2），以及 $2 \times 2$ 的「田字形方塊」（如下圖3）去覆蓋。如果小綠用了 $m$ 個「L字型方塊」以及 $n$ 個「田字形方塊」，恰好可以將 $9 \times 7$ 的方格表蓋滿（沒有縫隙），而且方塊彼此不重疊，試求所有數對 $(m, n)$ 的可能值。（註：「L字型」方塊可任意旋轉使用）

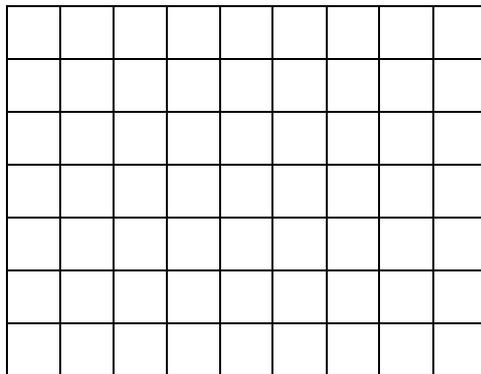


圖 1

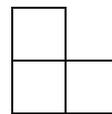


圖 2

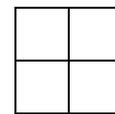


圖 3

- 4-6 已知 $\alpha$ 是 $x^5 - x^3 + x = 2$ 的實根，請證明： $3 < \alpha^6 < 4$ 。