

北一女中 103 學年度下學期《數戰數決》有獎徵答活動

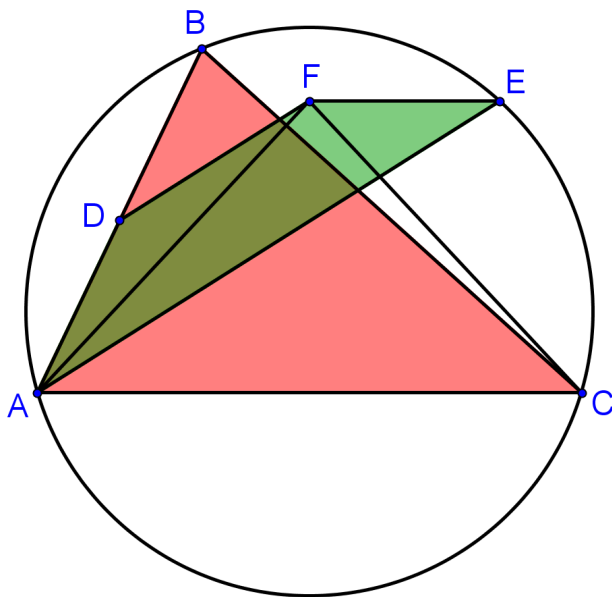
第四期題目：

2015 年 03 月 27 日下午 1 點鐘截止

4-1 請找出所有正整數數對 (a,b) ，使得 $\frac{a^3b-1}{a+1}$ 與 $\frac{ab^3+1}{b-1}$ 都是正整數。

4-2 如下圖，已知 $\triangle ABC$ 中， D 為 \overline{AB} 中點，作 $\angle A$ 的內角平分線交 $\triangle ABC$ 外接圓於點 E 。再取點 F ，使得 $AEFD$ 為等腰梯形，其中 $\overline{DF} \parallel \overline{AE}$ 。

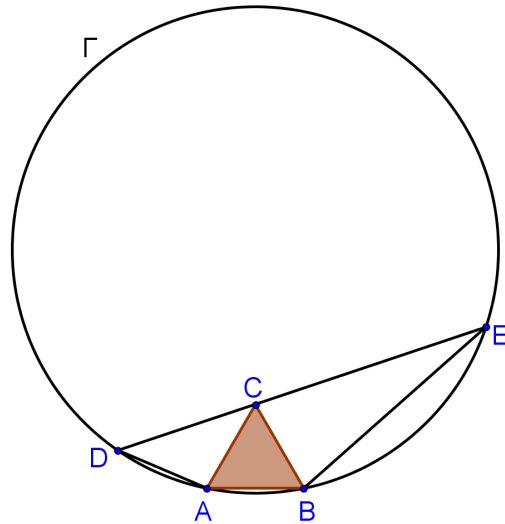
連接 \overline{AF} 、 \overline{FC} ，請證明： $\overline{AF} = \overline{FC}$ 。



4-3 已知 x 為正實數，請解下列方程式：

$$x + \sqrt{x(x+1)} + \sqrt{x(x+2)} + \sqrt{(x+1)(x+2)} = 2。$$

- 4-4 如下圖，已知圓 Γ 的半徑為1。正三角形 ABC 為的兩頂點 A 、 B 在圓 Γ 上， C 為圓 Γ 內部一點。在圓 Γ 上取異於 B 的點 D ，使得 $\overline{AD} = \overline{AB}$ 。連接直線 DC 與圓 Γ 交於點 E 。試求 \overline{CE} 的長度。



- 4-5 小綠將一個 9×7 的方格表（如下圖1），用3方格構成的「L字型方塊」（如下圖2），以及 2×2 的「田字形方塊」（如下圖3）去覆蓋。如果小綠用了 m 個「L字型方塊」以及 n 個「田字形方塊」，恰好可以將 9×7 的方格表蓋滿（沒有縫隙），而且方塊彼此不重疊，試求所有數對 (m, n) 的可能值。（註：「L字型」方塊可任意旋轉使用）

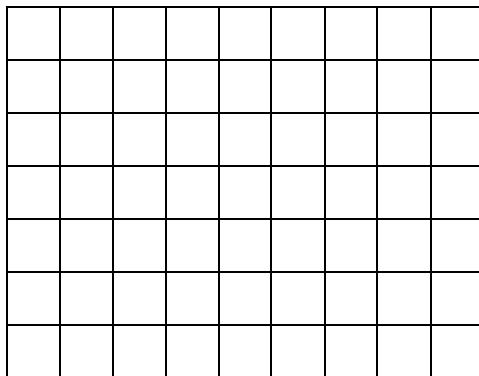


圖 1

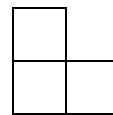


圖 2

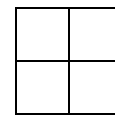


圖 3

- 4-6 已知 α 是 $x^5 - x^3 + x = 2$ 的實根，請證明： $3 < \alpha^6 < 4$ 。