北一女中 103 學年度下學期《數戰數決》有獎徵答活動

第四期解答：

4-1　請找出所有正整數數對(a,b)，使得$\dfrac{a^3b-1}{a+1}$與$\dfrac{ab^3+1}{b-1}$都是正整數。

答：$(a,b)=(2,2),(3,3)$ 或 $(1,3)$。

解：

因為$a+1\mid a^3b-1$且$a+1\mid (a+1)(a^2-a+1)b \Rightarrow a+1\mid a^3b+b$，

兩式相減可得$a+1\mid b+1$……①，於是$b+1\ge a+1 \Rightarrow b\ge a$。

因為$b-1\mid ab^3+1$且$b-1\mid (b-1)(b^2+b+1)a \Rightarrow b-1\mid ab^3-a$，

兩式相減可得$b-1\mid a+1$……②，於是$a+1\ge b-1 \Rightarrow b\le a+2$。

於是$b=a,a+1$或$a+2$。

Case 1.　若$b=a$。

則由②可得：$a-1\mid a+1 \Rightarrow a-1\mid (a+1)-(a-1) \Rightarrow a-1\mid 2$

$\Rightarrow a-1=1$或$2 \Rightarrow a=2$或3。

當$(a,b)=(2,2)$時，$\dfrac{a^3b-1}{a+1}=5$、$\dfrac{ab^3+1}{b-1}=17$滿足題目條件。

當$(a,b)=(3,3)$時，$\dfrac{a^3b-1}{a+1}=20$、$\dfrac{ab^3+1}{b-1}=41$滿足題目條件。

Case 2.　若$b=a+1$。

則由②可得：$a\mid a+1 \Rightarrow a\mid (a+1)-a \Rightarrow a\mid 1 \Rightarrow a=1 \Rightarrow b=a+1=2$。

但將$(a,b)=(1,2)$代入①得到$2\mid 3$，矛盾。

Case 3.　若$b=a+2$。

則由①可得：$a+1\mid a+3 \Rightarrow a+1\mid (a+3)-(a+1) \Rightarrow a+1\mid 2$

$\Rightarrow a+1=1$或$2 \Rightarrow a=0$（不合）或$1 \Rightarrow b=a+2=3$。

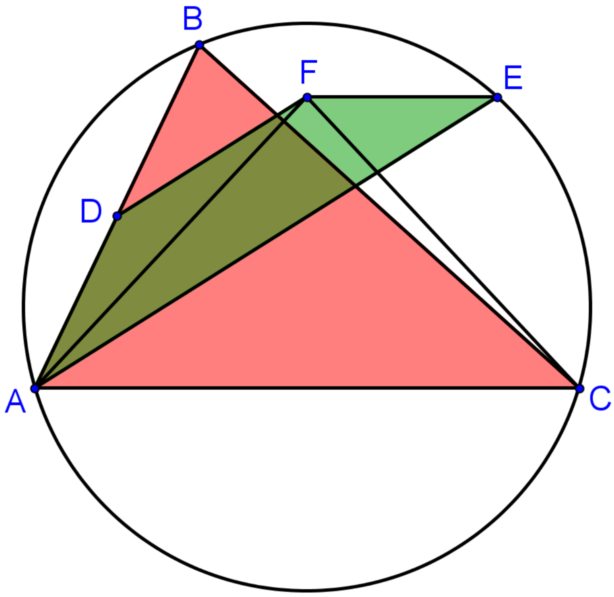
當$(a,b)=(1,3)$時，$\dfrac{a^3b-1}{a+1}=1$、$\dfrac{ab^3+1}{b-1}=14$滿足題目條件。

綜合以上可知$(a,b)=(2,2),(3,3)$或$(1,3)$。

4-2 如下圖，已知$\triangle ABC$中，D為$\overline{AB}$中點，作$\angle A$的內角平分線交$\triangle ABC$外接

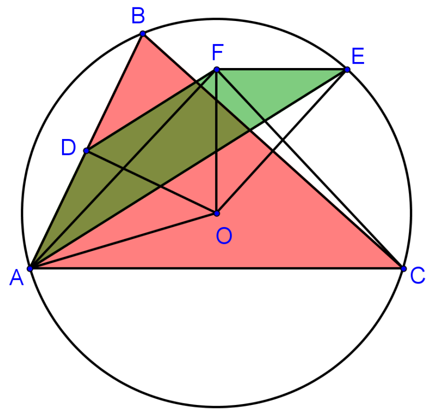
圓於點E。再取點F，使得$AEFD$為等腰梯形，其中$\overline{DF} // \overline{AE}$。

連接$\overline{AF}$、$\overline{FC}$，請證明：$\overline{AF} = \overline{FC}$。



解：

如右圖，取$\triangle ABC$的外心為O點，



連接$\overline{OA}$、$\overline{OD}$、$\overline{OF}$、$\overline{OE}$。

因為$\overline{OA} = \overline{OE}$，所以$\angle OAE = \angle OEA$。

又因為$AEFD$為等腰梯形，其中$\overline{DF} // \overline{AE}$，

所以$\overline{AD} = \overline{EF}$且$\angle DAE = \angle FEA$。

因為$\angle OAE = \angle OEA$且$\angle DAE = \angle FEA$，所以$\angle OAD = \angle OEF$，

於是$\triangle OAD \cong \triangle OEF \Rightarrow \angle OFE = \angle ODA = 90^\circ$（因為$D$為弦$\overline{AB}$中點）。

又因為$\angle CAE = \angle DAE = \angle FEA$，所以$\overline{EF} // \overline{AC}$，故$\overline{OF}$與$\overline{AC}$也垂直。

而O是外心，所以O是$\overline{AC}$中垂線上的點，故F也是$\overline{AC}$中垂線上的點，

於是可知$\overline{AF} = \overline{FC}$，證畢。

4-3 已知 x 為正實數，請解下列方程式：

$$x+\sqrt{x(x+1)}+\sqrt{x(x+2)}+\sqrt{(x+1)(x+2)}=2 \text{ 。}$$

答：$x=\dfrac{1}{24}$ 。

解：

令 $a=\sqrt{x}$ 、 $b=\sqrt{x+1}$ 、 $c=\sqrt{x+2}$ ，則 $x=a^2=b^2-1=c^2-2$ 。

於是原方程式可改寫成 3 種形式：

$$\begin{cases} a^2+ab+ac+bc=2 \\ (b^2-1)+ab+ac+bc=2 \\ (c^2-2)+ab+ac+bc=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a+b)(a+c)=2 \\ (b+a)(b+c)=3 \\ (c+a)(c+b)=4 \end{cases} \text{（★）。}$$

三式相乘可得 $[(a+b)(b+c)(c+a)]^2=24 \Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a)=2\sqrt{6}$ ，

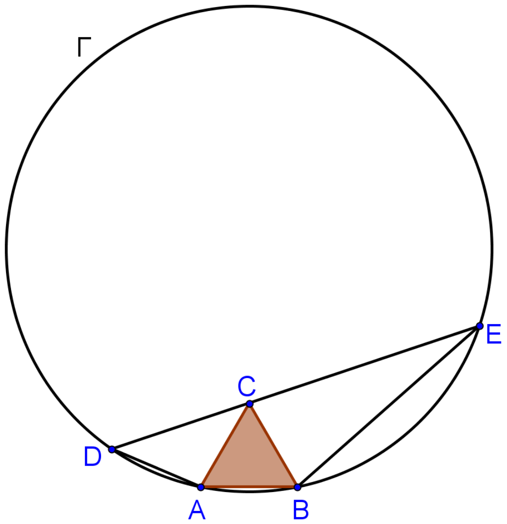
再分別與（★）中的三式相除可得 $\begin{cases} b+c=\sqrt{6}\cdots\cdots\cdots(1) \\ c+a=\dfrac{2}{3}\sqrt{6}\cdots\cdots(2) \\ a+b=\dfrac{1}{2}\sqrt{6}\cdots\cdots(3) \end{cases}$ ，

由 $\dfrac{(2)+(3)-(1)}{2}$ 可得 $a=\dfrac{1}{12}\sqrt{6} \Rightarrow x=a^2=\dfrac{1}{24}$ ，

代回原方程式檢驗可得左式 $=\dfrac{1}{24}+\sqrt{\dfrac{1}{24}\times\dfrac{25}{24}}+\sqrt{\dfrac{1}{24}\times\dfrac{49}{24}}+\sqrt{\dfrac{25}{24}\times\dfrac{49}{24}}$

$=\dfrac{1+5+7+35}{24}=2=$ 右式，故 $x=\dfrac{1}{24}$ 為唯一解。

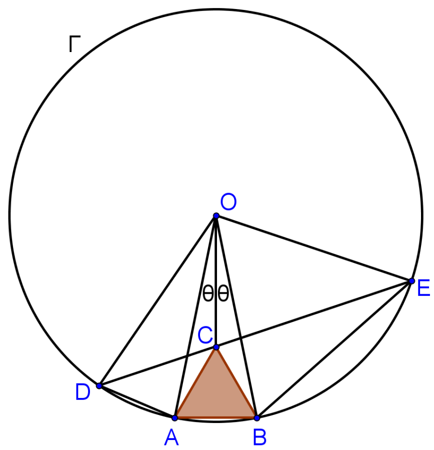
4-4 如下圖，已知圓Γ的半徑為 1。正三角形 ABC 為的兩頂點 A、B 在圓Γ上，C 為圓Γ內部一點。在圓Γ上取異於 B 的點 D，使得$\overline{AD}=\overline{AB}$。連接直線 DC 與圓Γ交於點 E。試求$\overline{CE}$的長度。



答：$\overline{CE}=1$。

解：

如右圖，取Γ的圓心 O，



連接$\overline{OA}$、$\overline{OB}$、$\overline{OC}$、$\overline{OD}$、$\overline{OE}$。

令$\angle AOB=2\theta$。

因為$\overline{OA}=\overline{OB}$、$\overline{OC}=\overline{OC}$、$\overline{CA}=\overline{CB}$，

所以$\triangle AOC\cong\triangle BOC\Rightarrow\angle AOC=\angle BOC=\theta$。

於是$\overset{\frown}{AB}=2\theta\Rightarrow\overset{\frown}{AD}=2\theta$，所以$\angle AOD=2\theta$。

因為$\overline{OB}=\overline{OA}=\overline{OD}$，所以$\angle OAD=\angle ODA=\dfrac{180^\circ-\angle AOD}{2}=90^\circ-\theta=\angle OAB$。

$\angle DAC=\angle OAB+\angle OAD-\angle CAB=(90^\circ-\theta)+(90^\circ-\theta)-60^\circ=120^\circ-2\theta$，

又$\overline{AC}=\overline{AB}=\overline{AD}$，所以$\angle ACD=\dfrac{180^\circ-\angle DAC}{2}=\dfrac{180^\circ-(120^\circ-2\theta)}{2}=30^\circ+\theta$。

於是$\angle BCE=180^\circ-\angle ACD-\angle ACB=180^\circ-(30^\circ+\theta)-60^\circ=90^\circ-\theta=\angle ODA$，

而又因為$\angle BEC=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{BAD}=\dfrac{1}{2}\angle BOD=2\theta=\angle AOD$、且$\overline{BC}=\overline{AB}=\overline{AD}$，

所以$\triangle BEC\cong\triangle AOD$（$AAS$ 全等性質）$\Rightarrow\overline{CE}=\overline{OD}=\Gamma$的半徑$=1$。

4-5 小綠將一個9×7的方格表（如下圖 1），用 3 方格構成的「L 字型方塊」（如下圖 2），以及2×2的「田字形方塊」（如下圖 3）去覆蓋。
如果小綠用了 m 個「L 字型方塊」以及 n 個「田字形方塊」，恰好可以將9×7的方格表蓋滿（沒有縫隙），而且方塊彼此不重疊，試求所有數對(m,n)的可能值。（註：「L 字型方塊」可任意旋轉使用）

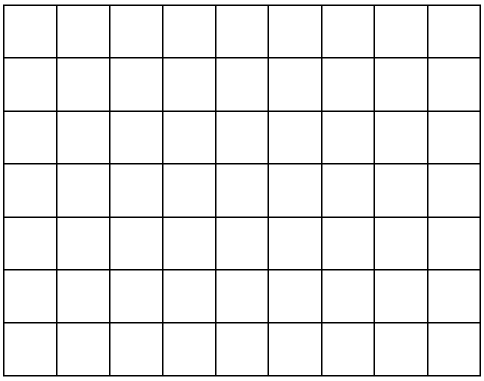


圖 1

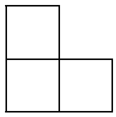


圖 2

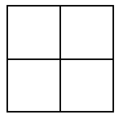
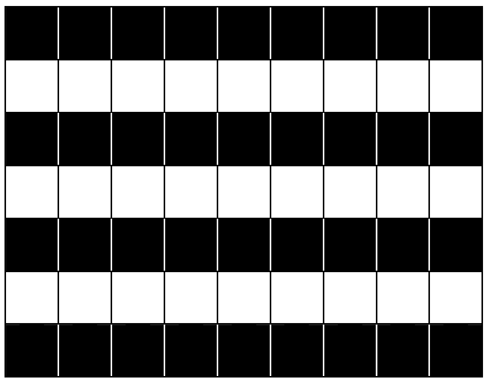


圖 3

答：$(m,n)=(17,3)$ 或 $(21,0)$ 。
解：



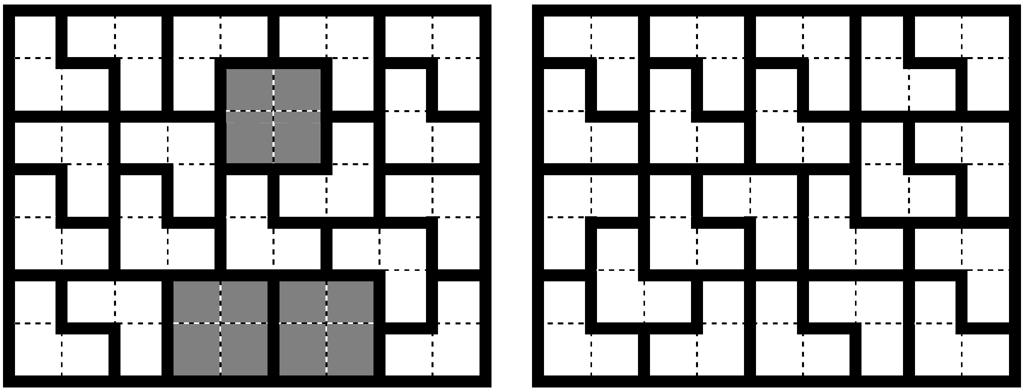
如右圖，
將第 1、3、5、7 列的格子塗成黑色（共 36 格），
第 2、4、6 列的格子塗成白色（共 27 格）。

假設有 x 個 L 字型方塊覆蓋了 2 黑格 1 白格，
我們稱這種方塊為 X 類 L 字型方塊。
假設有 y 個 L 字型方塊覆蓋了 1 黑格 2 白格，
我們稱這種方塊為 Y 類 L 字型方塊。
而對於 n 個田字型方塊，每個都覆蓋了 2 黑格 2 白格。
所以有$\begin{cases}2x+y+2n=36\\x+2y+2n=27\end{cases}$，
兩式相減得$x-y=9$，代回第一式化簡得$3y+2n=18$。

第 1 列的 9 個黑格中，因為 X 類 L 字型方塊和田字型方塊都覆蓋了 2 個黑格，
所以至少有一個黑格是被 Y 類 L 字型方塊覆蓋。
而第 3、5、7 列的黑格中，也都至少有一個黑格是被 Y 類 L 字型方塊覆蓋，
所以 y 至少是 4。

由$3y+2n=18$以及$y\geq4$可知：$n=\dfrac{18-3y}{2}\leq3$且必為 3 的倍數。
故$n=3$或$0\Rightarrow y=4$或$6\Rightarrow x=13$或$15\Rightarrow m=17$或$21\Rightarrow(m,n)=(17,3)$或$(21,0)$。

由以下二圖可知 $(m,n)=(17,3)$ 或 $(21,0)$ 確實都是可能的解。



4-6 已知 α 是 $x^5-x^3+x=2$ 的實根，請證明：$3<\alpha^6<4$。

解：

當 $x\le 0$ 時，$f(x)=x^5-x^3+x-2=x(x^4-x^2+1)-2=x(x^2-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}x-2<0$，

所以 $x^5-x^3+x=2$ 只有正實數解，亦即 $\alpha>0$。

當 $0<x\le 1$ 時，$f(x)=x^5-x^3+x-2<1^5-0^3+1-2=0$，所以 $\alpha>1$。

當 $x\ge 2$ 時，$f(x)=x^5-x^3+x-2=x^3(x^2-1)+x-2\ge 2^3(2^2-1)+2-2=24>0$，

所以 $\alpha<2$。

又 $\alpha^5-\alpha^3+\alpha=2 \Rightarrow (\alpha^2+1)\alpha(\alpha^4-\alpha^2+1)=2(\alpha^2+1)$

$$\Rightarrow \alpha(\alpha^6+1)=2(\alpha^2+1)\Rightarrow \alpha^6=\frac{2(\alpha^2+1)}{\alpha}-1$$ 。

所以 $3<\alpha^6<4 \Leftrightarrow 3<\frac{2(\alpha^2+1)}{\alpha}-1<4 \Leftrightarrow 4<\frac{2(\alpha^2+1)}{\alpha}<5$。

$\frac{2(\alpha^2+1)}{\alpha}>4 \Leftrightarrow 2(\alpha^2+1)>4\alpha \Leftrightarrow \alpha^2+1>2\alpha \Leftrightarrow (\alpha-1)^2>0$ 為真（因為 $\alpha>1$），

故 $\frac{2(\alpha^2+1)}{\alpha}>4$ 為真。

$\frac{2(\alpha^2+1)}{\alpha}<5 \Leftrightarrow 2(\alpha^2+1)<5\alpha \Leftrightarrow 2\alpha^2-5\alpha+2<0 \Leftrightarrow (2\alpha-1)(\alpha-2)<0$，

因為 $1<\alpha<2$，所以 $(2\alpha-1)(\alpha-2)<0$ 為真，故 $\frac{2(\alpha^2+1)}{\alpha}<5$。

於是 $4<\frac{2(\alpha^2+1)}{\alpha}<5$ 為真，故 $3<\alpha^6<4$ 也為真。