

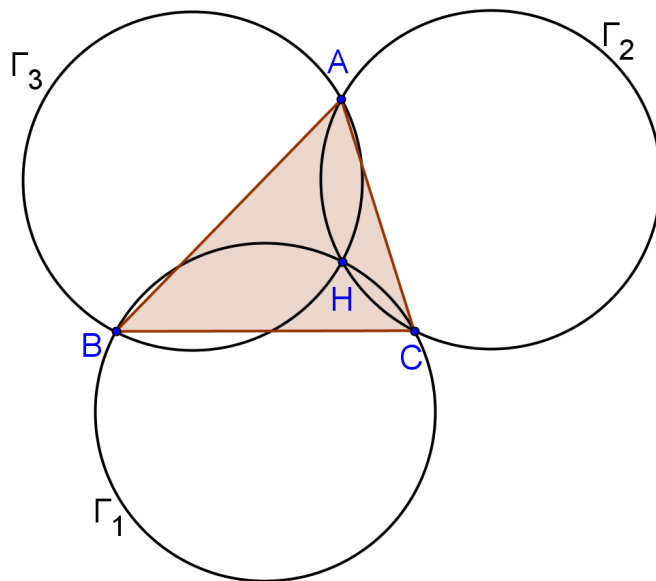
北一女中 104 學年度上學期《數戰數決》有獎徵答活動

第三期題目：

2015 年 12 月 31 日下午 1 點鐘截止

3-1 已知 x 為實數且滿足 $x^3 + \frac{1}{x^3} = 2\sqrt{5}$ ，試求 $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 之值。

3-2 如下圖，平面上有三個半徑相等的圓 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ 均通過點 H ，且假設圓 Γ_2, Γ_3 交於另一點 A 、圓 Γ_3, Γ_1 交於另一點 B 、圓 Γ_1, Γ_2 交於另一點 C ，而 A, B, C 均相異。請證明：點 H 為 $\triangle ABC$ 之垂心。
(三角形的垂心為此三角形三條高的交點。)



3-3 假設我們知道以下定理是成立的：

三變量的算幾不等式：

$$\text{若 } x, y, z \text{ 為非負實數，則 } \frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}。$$

請證明：若 $a, b, c > 0$ 且 $abc = 1$ ，則

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)} + \frac{b}{(b+1)(c+1)} + \frac{c}{(c+1)(a+1)} \geq \frac{3}{4}。$$

3-4 如果我們將平面上的每個點，都染成黑色或白色。請證明：在此平面上一定存在一個正三角形，其三頂點是同色的。

(註：平面上的點不限定於坐標為整數的點)

3-5 對於實數 x ，我們定義 $[x]$ 為不大於 x 的最大整數，例如： $[\pi]=3$ 。

請問：在 $1 \leq n \leq 2015$ 的範圍中，有幾個正整數 n 滿足 $[\sqrt{n}]$ 是 n 的因數？

3-6 對於實數 r ，我們定義平面上直線 L_r 的方程式為 $y = rx + r^2$ ，

顯然這樣的直線有無窮多條。

若平面上有一點 $P(\alpha, \beta)$ 不落在任何一條直線 L_r 上，

則 α 與 β 需滿足的關係為何？