北一女中 104 學年度上學期《數戰數決》有獎徵答活動

第三期解答：

3-1　已知 x 為實數且滿足 $x^3+\frac{1}{x^3}=2\sqrt{5}$ ，試求 $x^2+\frac{1}{x^2}$ 之值。

答：3

解：

令 $t=x+\frac{1}{x}$ ，則 $t^3=(x^3+\frac{1}{x^3})+3(x+\frac{1}{x})=2\sqrt{5}+3t$

$\Rightarrow t^3-3t-2\sqrt{5}=0$

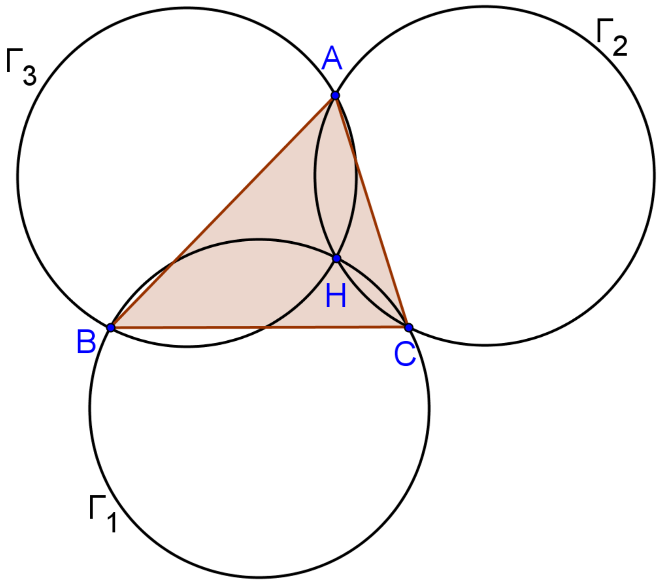
$\Rightarrow (t-\sqrt{5})(t^2+\sqrt{5}t+2)=0 \Rightarrow t=\sqrt{5}$ 或 $t^2+\sqrt{5}t+2=0$ 。

但 $t^2+\sqrt{5}t+2=(t+\frac{\sqrt{5}}{2})^2+\frac{3}{4}$ ，所以 $t^2+\sqrt{5}t+2=0$ 無實數解。

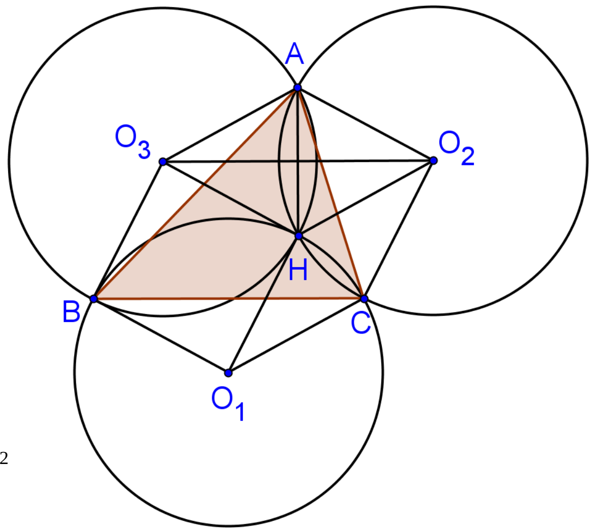
故 $t=\sqrt{5} \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2=t^2-2=3$ 。

3-2 如下圖，平面上有三個半徑相等的圓$\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3$均通過點$H$，且假設圓$\Gamma_2,\Gamma_3$交於另一點$A$、圓$\Gamma_3,\Gamma_1$交於另一點$B$、圓$\Gamma_1,\Gamma_2$交於另一點$C$，而$A$、$B$、$C$均相異。請證明：點$H$為$\triangle ABC$之垂心。

（三角形的垂心為此三角形三條高的交點。）



解：



如右圖，連接$\overline{O_1B},\overline{O_1C},\overline{O_2C},\overline{O_2A},$

$\overline{O_3A},\overline{O_3B},\overline{O_1H},\overline{O_2H},\overline{O_3H},\overline{O_2O_3},\overline{AH}$。

則$\overline{O_1B}=\overline{O_1C}=\overline{O_2C}=\overline{O_2A}$

$=\overline{O_3A}=\overline{O_3B}=\overline{O_1H}=\overline{O_2H}=\overline{O_3H}$

$=$圓$\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3$半徑長，

所以四邊形$AO_3HO_2,BO_3HO_1,CO_1HO_2$

都是菱形，於是$\overline{O_3B}\,//\,\overline{HO_1}\,//\,\overline{O_2C}$。

又$\overline{O_3B}=\overline{O_2C}$，所以$BCO_2O_3$為平行四邊形，故$\overline{O_2O_3}\,//\,\overline{BC}$。

又因為AO_3HO_2為菱形，所以兩對角線互相垂直$\Rightarrow\overline{AH}\perp\overline{O_2O_3}$。

因為$\overline{AH}\perp\overline{O_2O_3}$且$\overline{O_2O_3}\,//\,\overline{BC}$，所以直線$AH$與直線$BC$垂直。

同理可證直線BH與直線CA垂直、直線CH與直線AB垂直，

故點H為$\triangle ABC$之垂心，證畢。

3-3 假設我們知道以下定理是成立的：

三變量的算幾不等式： 若 x、y、z 為非負實數，則 $\dfrac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$ 。

請證明：若 $a,b,c>0$ 且 $abc=1$，則

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)}+\frac{b}{(b+1)(c+1)}+\frac{c}{(c+1)(a+1)} \geq \frac{3}{4} \text{ 。}$$

解：

$$\begin{aligned}
\text{左式} &= \frac{a(c+1)}{(a+1)(b+1)(c+1)}+\frac{b(a+1)}{(a+1)(b+1)(c+1)}+\frac{c(b+1)}{(a+1)(b+1)(c+1)} \\
&= \frac{a(c+1)+b(a+1)+c(b+1)}{(a+1)(b+1)(c+1)} \\
&= \frac{(ab+bc+ca)+(a+b+c)}{abc+(ab+bc+ca)+(a+b+c)+1} \\
&= \frac{(ab+bc+ca)+(a+b+c)}{(ab+bc+ca)+(a+b+c)+2} \quad \text{（因為 } abc=1\text{）} \\
&= 1-\frac{2}{(ab+bc+ca)+(a+b+c)+2} \text{ 。}
\end{aligned}$$

由三變量的算幾不等式可知：

$$\frac{ab+bc+ca}{3} \geq \sqrt[3]{ab\cdot bc\cdot ca}=\sqrt[3]{(abc)^2}=1 \Rightarrow ab+bc+ca \geq 3 \text{，}$$

且 $\dfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{a\cdot b\cdot c}=\sqrt[3]{abc}=1 \Rightarrow a+b+c \geq 3$，

所以 $(ab+bc+ca)+(a+b+c)+2 \geq 8$

$$\Rightarrow \frac{2}{(ab+bc+ca)+(a+b+c)+2} \leq \frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

左式 $=1-\dfrac{2}{(ab+bc+ca)+(a+b+c)+2} \geq 1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}=$ 右式，證畢。

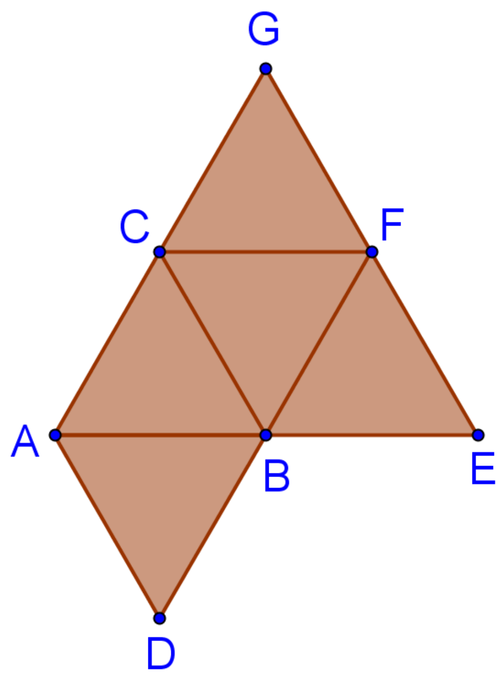
3-4 如果我們將平面上的每個點，都染成黑色或白色。請證明：在此平面上一定存在一個正三角形，其三頂點是同色的。

（註：平面上的點不限定於坐標為整數的點）

解：

反證法：假設平面上不存在一個正三角形，其三頂點是同色的。

先任選一個正三角形，由假設可知其三頂點不同色。
所以必定有其中兩頂點同色，
不妨假設是 A、B 兩點同為黑色。



如右圖，作一系列正三角形，
圖中$\triangle ABC$、$\triangle ABD$、$\triangle BCF$、
$\triangle BEF$、$\triangle CFG$ 均為正三角形。

由假設，不能有正三角形的三頂點同色，
所以由 A、B 為黑色點可推得 C 為白色點。
同理由 A、B 為黑色點可推得 D 為白色點。
由 C、D 為白色點可推得 E 為黑色點。
由 B、E 為黑色點可推得 F 為白色點。
由 C、F 為白色點可推得 G 為黑色點。

但如此一來，
$\triangle AEG$ 為正三角形，且其三頂點均為黑色，矛盾。

故假設必定是錯的，由反證法可知：
在此平面上一定存在一個正三角形，其三頂點是同色的。

3-5 對於實數 x，我們定義 $[x]$ 為不大於 x 的最大整數，例如：$[\pi]=3$。

請問：在 $1\le n\le 2015$ 的範圍中，有幾個正整數 n 滿足 $[\sqrt{n}]$ 是 n 的因數？

答：131

解：

假設 $[\sqrt{n}]=k$，則 $k\le\sqrt{n}<k+1\Rightarrow k^2\le n<(k+1)^2$

$$\Rightarrow k^2\le n<k(k+2)+1\Rightarrow k^2\le n\le k(k+2)\text{。}$$

又因為 $[\sqrt{n}]=k$ 為 n 的因數，所以 $n=k^2$ 或 $k(k+1)$ 或 $k(k+2)$。

反之，若 $n=k^2$ 或 $k(k+1)$ 或 $k(k+2)$，

則 $k^2\le n<(k+1)^2\Rightarrow k\le\sqrt{n}<k+1$，所以 $[\sqrt{n}]=k$ 必為 n 的因數。

所以我們只需計算有幾個 $n=k^2$ 或 $k(k+1)$ 或 $k(k+2)$ 會在 $1\le n\le 2015$ 的範圍中。

Case 1. 若 $n=k^2$。

因為 $44^2=1936<2015<2025=45^2$，

所以 $1\le k^2\le 44^2\Rightarrow 1\le k\le 44$，有 44 個。

Case 2. 若 $n=k(k+1)$。

因為 $44\times 45=1980<2015<2070=45\times 46$，

所以 $1\times 2\le k(k+1)\le 44\times 45\Rightarrow 1\le k\le 44$，有 44 個。

Case 3. 若 $n=k(k+2)$。

因為 $43\times 45=1935<2015<2024=44\times 46$，

所以 $1\times 3\le k(k+2)\le 43\times 45\Rightarrow 1\le k\le 43$，有 43 個。

綜合以上所述可知滿足條件的 n 共有 $44+44+43=131$ 個。

3-6　對於實數 r，我們定義平面上直線 L_r 的方程式為 $y = rx + r^2$，

顯然這樣的直線有無窮多條。

若平面上有一點 $P(\alpha,\beta)$ 不落在任何一條直線 L_r 上，

則 α 與 β 需滿足的關係為何？

答：$\beta < -\frac{1}{4}\alpha^2$。

解：

若 $P(\alpha,\beta)$ 不落在任何一條直線 L_r 上，

則不存在實數 r 使得 $P(\alpha,\beta)$ 落在 $L_r : y = rx + r^2$ 上，

這表示 $\beta = r\alpha + r^2 \Rightarrow r^2 + \alpha r - \beta = 0$ 這個方程式中的 r 是無實數解的，

所以其判別式 $\alpha^2 - 4\cdot 1\cdot(-\beta) < 0 \Rightarrow \beta < -\frac{1}{4}\alpha^2$。

註：這些 P 點形成的圖形如下（藍色區域），

可以看出所有的 L_r 會圍繞出一條拋物線的形狀。

我們稱此拋物線 $y = -\frac{1}{4}x^2$ 為直線族 L_r 的包絡線（*envelope*）。