

# 北一女中 104 學年度上學期《數戰數決》有獎徵答活動

## 第二期題目：

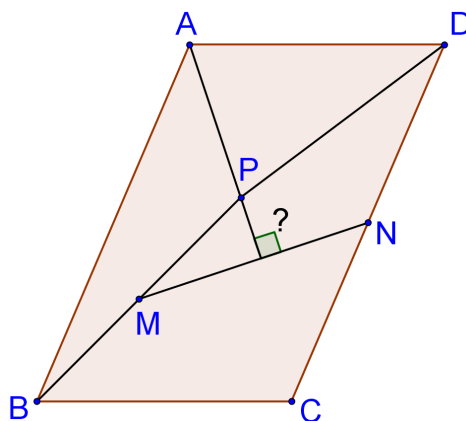
2015 年 11 月 20 日下午 1 點鐘截止

2-1 已知  $P$  為平行四邊形  $ABCD$  內部一點，

且滿足  $\overline{PD} = \overline{AD}$ 。取  $\overline{PB}$  的中點  $M$

與  $\overline{CD}$  的中點  $N$ ，連接直線  $MN$  與

直線  $PA$ ，請證明： $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{PA}$ 。



2-2 如右圖，在一個  $3 \times 3$  的方格表內，每個格子都有一個數值 0。現在小綠進行以下的操作：任選「相鄰」的 2 個方格，將方格裡的數值同時加 1 或同時減 1。

請證明：小綠不可能在進行若干次操作後，將每個方格裡的數值都變成 2。

註：所謂「相鄰」的方格是指「有公共邊」的方格。

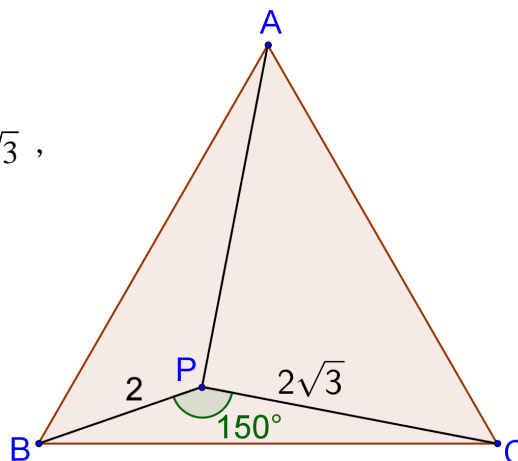
0	0	0
0	0	0
0	0	0

2-3 請找出滿足  $x^3 + y^3 = (x + y)^2$  的所有數對  $(x, y)$ ，其中  $x, y$  均為整數。

2-4 已知  $P$  是正三角形  $ABC$  的內部一點，

假設  $\angle BPC = 150^\circ$ 、 $\overline{PB} = 2$ 、 $\overline{PC} = 2\sqrt{3}$ ，

試求  $\overline{PA}$  的長度。



2-5 小青跟小綠玩遊戲：現在有 2015 張牌，每張牌上都寫著 1 或  $-1$ 。小青將這 2015 張牌覆蓋在桌上（小綠無法看到牌上的數字），小綠可以任選 3 張牌，並且問小青：「這 3 張牌上的數的乘積是多少？」小青回答後，小綠可以再任選 3 張牌並且問小青：「這 3 張牌上的數的乘積是多少？」這樣的問答過程可以一直持續下去。請問：小綠最少需要提問幾次，就一定可以知道這 2015 張牌上的數的乘積是 1 還是  $-1$ ？

2-6 小綠主張：有一個這樣的正整數  $n$ ，其首位數字不是 1，但  $n, n^2, n^3, \dots, n^{2015}$  的首位數字均相同。請你判斷並證明小綠的主張是對還是錯的。

註：正整數的「首位數字」，就是十進位制表示法中最左端的數字，

例如 2015 的首位數字為 2。