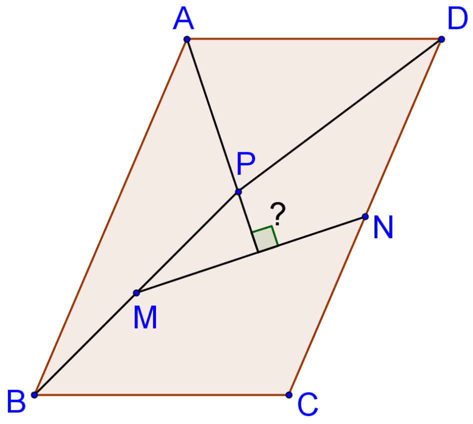
北一女中 104 學年度上學期《數戰數決》有獎徵答活動

第二期解答：



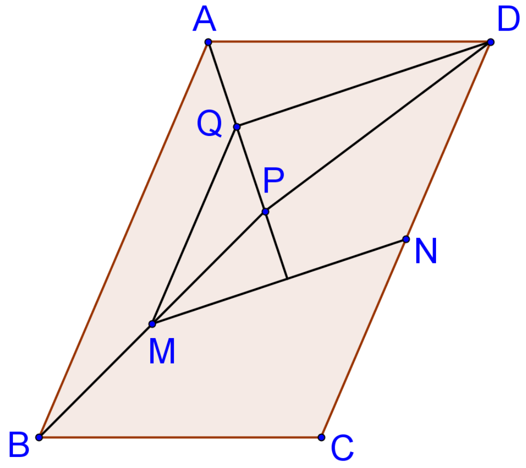
2-1　已知 P 為平行四邊形 $ABCD$ 內部一點，

且滿足 $\overline{PD}=\overline{AD}$。取 $\overline{PB}$ 的中點 M

與 $\overline{CD}$ 的中點 N，連接直線 MN 與

直線 PA，請證明：$\overleftrightarrow{MN}\perp\overleftrightarrow{PA}$。

解：



取 $\overline{AP}$ 中點 Q，連接 $\overline{DQ}$、$\overline{QM}$。

因為 $\overline{PD}=\overline{AD}$，且 Q 為 $\overline{AP}$ 中點，

所以 $\overline{DQ}\perp\overline{AP}$。

因為 Q、M 分別為 $\overline{AP}$ 中點、$\overline{PB}$ 中點，

所以 $\overline{QM}//\overline{AB}//\overline{CD}$，

且 $\overline{QM}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\overline{CD}=\overline{DN}$，故 $DQMN$ 為平行四邊形 $\Rightarrow \overline{DQ}//\overline{MN}$。

因為 $\overline{DQ}//\overline{MN}$ 且 $\overline{DQ}\perp\overline{AP}$，所以 $\overleftrightarrow{MN}\perp\overleftrightarrow{PA}$，證畢。

2-2 如右圖，在一個3×3的方格表內，每個格子都有一個數值 0。 現在小綠進行以下的操作：任選「相鄰」的 2 個方格，將方格裡的數值同時加 1 或同時減 1。

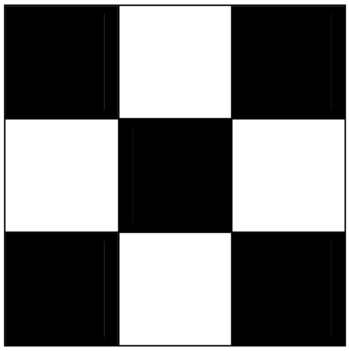
請證明：小綠不可能在進行若干次操作後，將每個方格裡的數值都變成 2。

註：所謂「相鄰」的方格是指「有公共邊」的方格。

0	**0**	**0**
0	**0**	**0**
0	**0**	**0**

解：

如右圖，將3×3的方格表塗色成黑白相間。



容易看出，小綠的每一次操作，

都是將一黑一白的格中數值同時加 1 或同時減 1，

所以「黑格中的數值總和」與「白格中的數值總和」

必定在操作過程中都是恆等的。

但若每個方格裡的數值都是 2，

則黑格中的數值總和為 10；

白格中的數值總和為 8；與前述矛盾。

故小綠不可能在進行若干次操作後，將每個方格裡的數值都變成 2，證畢。

2-3 請找出滿足 $x^3+y^3=(x+y)^2$ 的所有數對 (x,y)，其中 x、y 均為整數。
答：$(x,y)=(1,0),(0,1),(2,1),(1,2),(2,2),(n,-n)$，其中 $n\in\mathbb{Z}$
解：
$$x^3+y^3=(x+y)^2 \Rightarrow (x+y)(x^2-xy+y^2)=(x+y)^2$$
$$\Rightarrow (x+y)[(x^2-xy+y^2)-(x+y)]=0$$，
所以 $x+y=0$ 或 $(x^2-xy+y^2)-(x+y)=0$。

Case 1. 若 $x+y=0$。
則 $(x,y)=(n,-n)$，$n\in\mathbb{Z}$，
帶回原方程式可得左式 $=n^3+(-n)^3=0$，右式 $=(n-n)^2=0$，
所以 $(x,y)=(n,-n)$，$n\in\mathbb{Z}$ 都是方程式的解。

Case 2. 若 $(x^2-xy+y^2)-(x+y)=0\cdots\cdots$（★）。
整理成 x 的二次方程式可得 $x^2-(y+1)x+(y^2-y)=0$。
因為 x 有實數解，所以判別式 $(y+1)^2-4(y^2-y)\geq 0 \Rightarrow 3y^2-6y-1\leq 0$。
配方後可得 $3(y-1)^2\leq 4$。
因為 y 為整數，所以 $(y-1)^2=0$ 或 1，故 $y=0$ 或 1 或 2。
若 $y=0$，代回（★）可得 $x^2-x=0 \Rightarrow x=0$ 或 1。
若 $y=1$，代回（★）可得 $x^2-2x=0 \Rightarrow x=0$ 或 2。
若 $y=2$，代回（★）可得 $x^2-3x+2=0 \Rightarrow x=1$ 或 2。
所以 $(x,y)=(0,0),(1,0),(0,1),(2,1),(1,2),(2,2)$。
（其中 $(x,y)=(0,0)$ 也包含在 Case 1 的解之內。）

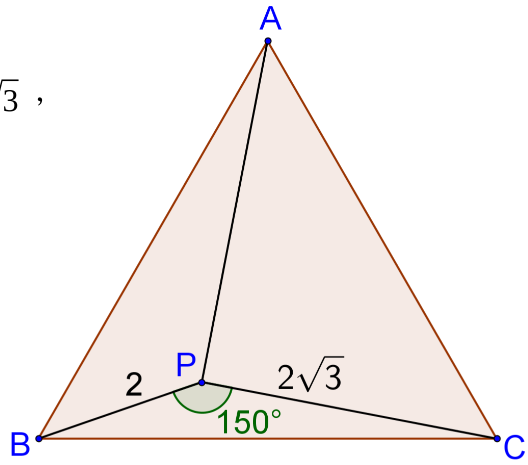
綜合以上可知，$(x,y)=(1,0),(0,1),(2,1),(1,2),(2,2),(n,-n)$，其中 $n\in\mathbb{Z}$。

註：Case 2 中的方程式也可以這樣解：
$$(x^2-xy+y^2)-(x+y)=0$$
$$\Rightarrow 2x^2-2xy+2y^2-2x-2y=0$$
$$\Rightarrow (x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2=2$$
所以 $(x-y)^2$、$(x-1)^2$、$(y-1)^2$ 必定其中 2 項為 1、另 1 項為 0。
進而可推得 $(x,y)=(0,0),(1,0),(0,1),(2,1),(1,2),(2,2)$。

2-4　已知 P 是正三角形 ABC 的內部一點，

假設 $\angle BPC = 150°$、$\overline{PB} = 2$、$\overline{PC} = 2\sqrt{3}$，

試求 $\overline{PA}$ 的長度。



答：4。

解：

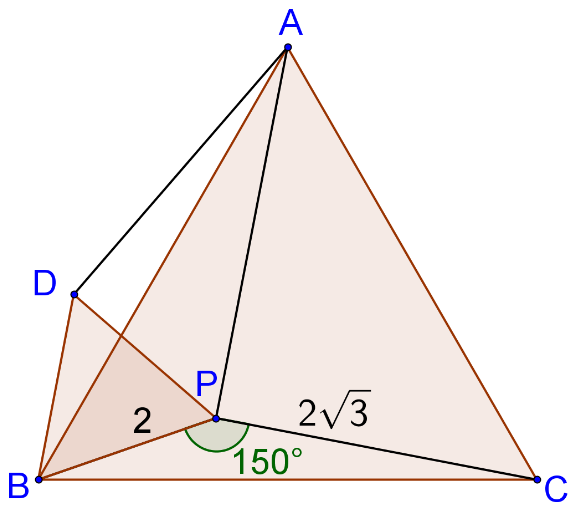
如右下圖，因為$\triangle ABC$ 為正三角形，

所以可將$\triangle PBC$ 繞著 B 點旋轉 $60°$，

使得 C 與 A 重疊，而 P 點旋轉至 D 點。

於是 $\angle BDA = \angle BPC = 150°$，

且 $\overline{DA} = \overline{PC} = 2\sqrt{3}$、$\overline{DB} = \overline{PB} = 2$。



連接 $\overline{DP}$。

因為 $\angle PBD = 60°$，且 $\overline{PB} = \overline{DB}$，

所以$\triangle PBD$ 為正三角形

$\Rightarrow \overline{PD} = \overline{PB} = 2$ 且 $\angle PDB = 60°$。

於是 $\angle ADP = \angle ADB - \angle PDB = 150° - 60° = 90°$，

又 $\overline{DA} = 2\sqrt{3}$、$\overline{PD} = 2$，所以 $\overline{PA} = \sqrt{\overline{DA}^2 + \overline{PD}^2} = 4$。

2-5 小青跟小綠玩遊戲：現在有 2015 張牌，每張牌上都寫著 1 或 −1。小青將這 2015 張牌覆蓋在桌上（小綠無法看到牌上的數字），小綠可以任選 3 張牌，並且問小青：「這 3 張牌上的數的乘積是多少？」小青回答後，小綠可以再任選 3 張牌並且問小青：「這 3 張牌上的數的乘積是多少？」這樣的問答過程可以一直持續下去。請問：小綠最少需要提問幾次，就一定可以知道這 2015 張牌上的數的乘積是 1 還是 −1？

答：673 次。

解：

假設這 2015 張牌上的數分別為 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_{2015}$。

如果小綠提問的次數≤671，則他的提問至多只牽涉到 2013 張牌，
顯然無從判斷這 2015 張牌上的數的乘積是 1 還是 −1。

如果小綠只提問了 672 次，這 2015 張牌都至少要被小綠選到 1 次，
所以這 2015 張牌必定恰有一張牌被小綠選了 2 次，其他牌都恰好被選了 1 次。
不妨假設小綠選了 2 次的是 a_{2015}，
且小綠提問的是 $a_1a_2a_3, a_4a_5a_6, \cdots\cdots, a_{2008}a_{2009}a_{2010}$ 以及 $a_{2011}a_{2012}a_{2015}, a_{2013}a_{2014}a_{2015}$。
若現在將 $a_{2011}, a_{2013}, a_{2015}$ 都變號，
則小綠提問後所得到的答案都是相同的，但乘積 $a_1a_2a_3a_4a_5\cdots\cdots a_{2015}$ 卻變號了，
這表示小綠不可能從這 672 次提問就得到乘積 $a_1a_2a_3a_4a_5\cdots\cdots a_{2015}$ 的值。

現在考慮小綠提問了 673 次的方法如下：
前 671 次，提問 $a_1a_2a_3, a_4a_5a_6, \cdots\cdots, a_{2011}a_{2012}a_{2013}$ 的乘積。
第 672 次，提問 $a_1a_2a_{2014}$ 的乘積。
第 673 次，提問 $a_1a_2a_{2015}$ 的乘積。

將這 673 次提問的結果再相乘可得 $a_1^3a_2^3a_3a_4a_5\cdots\cdots a_{2015}$，

這與乘積 $a_1a_2a_3a_4a_5\cdots\cdots a_{2015}$ 是相等的。
故小綠最少需要的提問次數為 673。

2-6 小綠主張：有一個這樣的正整數 n，其首位數字不是 1，但 $n,n^2,n^3,\cdots\cdots,n^{2015}$ 的首位數字均相同。請你判斷並證明小綠的主張是對還是錯的。

註：正整數的「首位數字」，就是十進位制表示法中最左端的數字，

例如 2015 的首位數字為 2。

答：小綠的主張是對的。

解：

考慮 $x^{2015}=0.9$ 的唯一正根 $\sqrt[2015]{0.9}=0.\underbrace{999\cdots\cdots9}_{k個9}a_1a_2\cdots\cdots$，

其中 a_1 是 $\sqrt[2015]{0.9}$ 以十進位小數表現時，小數點後第一個不為 9 的數字。

取 $n=\underbrace{9999\cdots\cdots9}_{k+1個9}$，因為 $\sqrt[2015]{0.9}=0.\underbrace{999\cdots\cdots9}_{k個9}a_1a_2\cdots\cdots<0.\underbrace{999\cdots\cdots9}_{k+1個9}<1$，

所以 $10^{k+1}\cdot\sqrt[2015]{0.9}<n<10^{k+1}\Rightarrow 0.9\times10^{2015k+2015}<n^{2015}<10^{2015k+2015}$，

故 n^{2015} 的首位數字為 9。

同理亦可證明：

當 $m=2,3,4,\cdots\cdots,2014$ 時，有 $(\sqrt[2015]{0.9})^m\times10^{mk+m}<n^m<10^{mk+m}$，

又因為 $0<\sqrt[2015]{0.9}<1$，所以 $(\sqrt[2015]{0.9})^m>(\sqrt[2015]{0.9})^{2015}=0.9$，

故 $0.9\times10^{mk+m}<n^m<10^{mk+m}\Rightarrow n^m$ 的首位數字為 9。

所以 $n,n^2,n^3,\cdots\cdots,n^{2015}$ 的首位數字均為 9，故小綠的主張是對的。