北一女中 104 學年度上學期《數戰數決》有獎徵答活動

第一期題目：

2015 年 10 月 08 日下午 1 點鐘截止

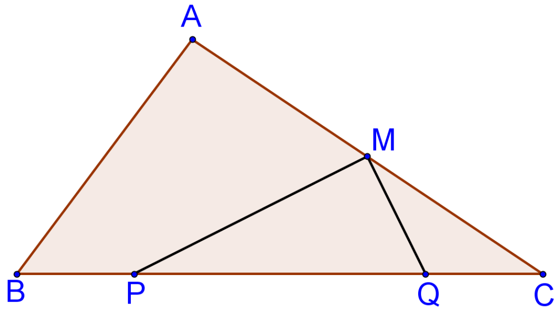
1-1 如右圖，平面上有$\triangle ABC$，

其中$\overline{BC}$上有 P、Q 兩點滿足

$\overline{PQ}=\overline{AB}$且$\overline{BP}=\overline{CQ}$。

取$\overline{AC}$中點 M，連接$\overline{MP}$、$\overline{MQ}$，

請證明：$\overline{MP}\perp\overline{MQ}$。



1-2 對於正整數 n 而言，如果 $f(n)=n^2-1$可以表示成 3 個相異質數的乘積，則我們稱這樣的 n 為「特別數」。
例如：$n=96$是「特別數」，因為 $f(96)=9215=5\times19\times97$。
試求最小的 7 個「特別數」的總和。

1-3 已知 $f(x)=ax+b$，其中 a,b 均為整數。
若 $f(f(0))=0$，且 $f(f(f(20)))=15$，
試求 $f(f(f(f(1))))+f(f(f(f(2))))+\cdots\cdots+f(f(f(f(2015))))$之值。

1-4 將編號 1～12 號的牌共 12 張，分給甲、乙、丙 3 人，每人 4 張牌。
已知甲手上的牌，其編號平方和為 207；
乙手上的牌，其編號平方和為 215；
丙手上的牌，其編號平方和為 228。
請問甲、乙、丙手上的牌，其編號分別為何？

1-5 某天<u>阿祥</u>、<u>阿仁</u>、<u>阿慶</u>三人一起打桌球。一開始先任選兩人對戰一局，接下來每局結束後，輸的人就下場，換第三人上來挑戰贏的人。打了一整天後，他們三人統計結果，<u>阿祥</u>總共贏了 8 局、<u>阿仁</u>贏了 17 局、<u>阿慶</u>贏了 21 局。請問：阿祥總共上場了幾局？

1-6 如右圖，平面上有$\triangle ABC$，

取$\overline{BC}$中點 M，連接$\overline{AM}$。

再取$\overline{AM}$的三等分點 D、E，

使得$\overline{AD}=\overline{DE}=\overline{EM}$。

在平面上取一點 F，
使得$\triangle DEF\sim\triangle ABC$，
且點 F 與 B 在直線 AM 的同一側。
請證明：點 F 一定在直線 AB 上。