# 北一女中 104 學年度上學期《數戰數決》有獎徵答活動

## 第一期解答：

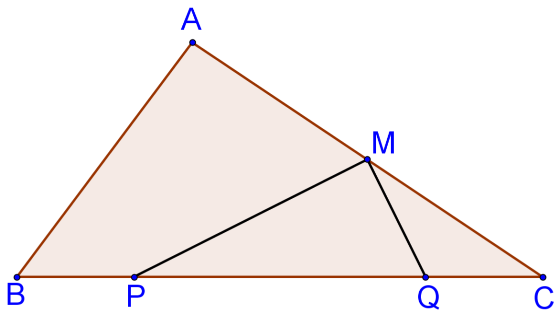
1-1 如右圖，平面上有$\triangle ABC$，

其中$\overline{BC}$上有 $P$、$Q$ 兩點滿足

$\overline{PQ}=\overline{AB}$ 且 $\overline{BP}=\overline{CQ}$ 。

取$\overline{AC}$中點 $M$，連接$\overline{MP}$ 、$\overline{MQ}$ ，

請證明：$\overline{MP}\perp\overline{MQ}$ 。




解：

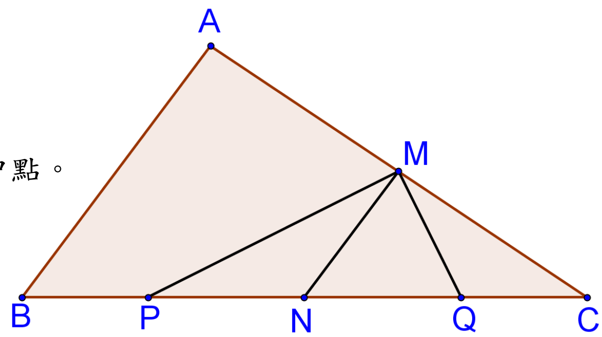
取$\overline{PQ}$中點 $N$，連接$\overline{MN}$ ，

則 $\overline{NP}=\overline{NQ}=\dfrac{1}{2}\overline{PQ}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}$ 。

因為 $\overline{BP}=\overline{CQ}$ ，所以 $N$ 也是$\overline{BC}$的中點。

又，$M$ 是$\overline{AC}$的中點，

所以 $\overline{MN}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}$ 。




由此可知 $\overline{NP}=\overline{NQ}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=\overline{NM}\Rightarrow$ 點 $N$ 為$\triangle MPQ$ 的外心。

只有直角三角形的外心才會落在邊上，且此邊必為斜邊，

故 $\angle PMQ=90^\circ$ ，即 $\overline{MP}\perp\overline{MQ}$ 。

1-2 對於正整數 $n$ 而言，如果 $f(n)=n^2-1$ 可以表示成 3 個相異質數的乘積，則我們稱這樣的 $n$ 為「特別數」。

例如：$n=96$ 是「特別數」，因為 $f(96)=9215=5\times19\times97$。

試求最小的 7 個「特別數」的總和。

答：178

解：顯然 1、2、3 都不是「特別數」。

假設 $f(n)=n^2-1=(n-1)(n+1)$ 為 3 個相異質數 $p,q,r$ 的乘積，

因為 $n\ge4$，所以「特別數」可能有兩種形式：$\begin{cases} n-1=p \\ n+1=qr \end{cases}$ 或 $\begin{cases} n-1=pq \\ n+1=r \end{cases}$。

考慮第一種形式 $\begin{cases} n-1=p \\ n+1=qr \end{cases}$，試驗可知 $p=13,19,31,37,\cdots\cdots$ 滿足 $n+1=qr$，

其對應的 $n$ 值為 $14,20,32,38,\cdots\cdots$。

考慮第二種形式 $\begin{cases} n-1=pq \\ n+1=r \end{cases}$，試驗可知 $r=17,23,37,\cdots\cdots$ 滿足 $n-1=pq$，

其對應的 $n$ 值為 $16,22,36,\cdots\cdots$。

所以「特別數」由小至大依序為 $14,16,20,22,32,36,38,\cdots\cdots$

前 7 個「特別數」的總和為 $14+16+20+22+32+36+38=178$。

1-3 已知 $f(x)=ax+b$，其中 $a,b$ 均為整數。

若 $f(f(0))=0$，且 $f(f(f(20)))=15$，

試求 $f(f(f(f(1))))+f(f(f(f(2))))+\cdots\cdots+f(f(f(f(2015))))$ 之值。

答：2031120

解：

$0=f(f(0))=f(b)=ab+b$，所以 $b(a+1)=0$。

Case 1.　當 $b=0$ 時，$f(x)=ax$。

$15=f(f(f(20)))=f(f(20a))=f(20a^2)=20a^3\Rightarrow a^3=\dfrac{3}{4}$，此與 $a$ 為整數矛盾。

Case 2.　當 $a+1=0$，即 $a=-1$ 時，$f(x)=-x+b$。

$15=f(f(f(20)))=f(f(-20+b))=f(20)=-20+b\Rightarrow b=35$，

所以 $f(x)=-x+35$。

於是 $f(f(f(f(x))))=f(f(f(-x+35)))=f(f(x))=f(-x+35)=x$，

故 $f(f(f(f(1))))+f(f(f(f(2))))+\cdots\cdots+f(f(f(f(2015))))$

$=1+2+\cdots\cdots+2015=\dfrac{2015\times2016}{2}=2015\times1008=2031120$。

1-4 將編號 1～12 號的牌共 12 張，分給甲、乙、丙 3 人，每人 4 張牌。

已知甲手上的牌，其編號平方和為 207；

乙手上的牌，其編號平方和為 215；

丙手上的牌，其編號平方和為 228。

請問甲、乙、丙手上的牌，其編號分別為何？

答：{ 甲：1、5、9、10；乙：3、6、7、11；丙：2、4、8、12。}

或者 { 甲：1、6、7、11；乙：3、5、9、10；丙：2、4、8、12。}

解：

定義符號：若整數 $i, j$ 除以 $n$ 所得的餘數相等，則記為 $i \equiv j \pmod{n}$。

引理：若 $n$ 為整數，則完全平方數 $n^2 \equiv 0$ 或 $1 \pmod{4}$。

引理證明：

若 $n$ 為偶數，令 $n = 2k$ （$k \in \mathbb{Z}$），則 $n^2 = 4k^2$，此時 $n^2 \equiv 0 \pmod{4}$。

若 $n$ 為奇數，令 $n = 2k+1$（$k \in \mathbb{Z}$），則 $n^2 = 4(k^2+k)+1$，此時 $n^2 \equiv 1 \pmod{4}$。

甲的手牌編號平方和為 $207 \equiv 3 \pmod{4}$，所以甲的手牌編號必為 3 奇數 1 偶數。

乙的手牌編號平方和為 $215 \equiv 3 \pmod{4}$，所以乙的手牌編號必為 3 奇數 1 偶數。

於是丙的手牌編號必為 4 個偶數。

考慮偶數編號 $2,4,6,8,10,12$ 的平方：$4,16,36,64,100,144$，其總和為 364。

刪除兩數即為丙的手牌編號平方，所以刪除的兩數和 $364-228=136$，

故刪除的數為 36 與 100，亦即丙的手牌編號為 2、4、8、12。

剩下 8 張牌，編號為 1、3、5、6、7、9、10、11 在甲、乙兩人手裡。

編號 10、11 的牌不能在同一人手裡，否則編號平方和超過 $10^2+11^2=221$，矛盾。

編號 9、11 的牌也不能在同一人手裡，

否則此人剩下 2 張牌的編號平方和為 $207-9^2-11^2=5$ 或 $215-9^2-11^2=8$，

都不可能。

於是編號 9、10 的牌必在同一人手裡，

此人剩下 2 張牌的編號平方和為 $207-9^2-10^2=26$ 或 $215-9^2-10^2=34$。

Case 1.　若為 26，則可由 $1^2+5^2$ 而得。

進而可得甲的手牌為 1、5、9、10；乙的手牌為 3、6、7、11。

Case 2.　若為 34，則可由 $3^2+5^2$ 而得。

進而可得甲的手牌為 1、6、7、11；乙的手牌為 3、5、9、10。

1-5 某天阿祥、阿仁、阿慶三人一起打桌球。一開始先任選兩人對戰一局，接下來每局結束後，輸的人就下場，換第三人上來挑戰贏的人。打了一整天後，他們三人統計結果，阿祥總共贏了 8 局、阿仁贏了 17 局、阿慶贏了 21 局。請問：阿祥總共上場了幾局？

答：27 局。

可以知道此三人總共比賽了8＋17＋21＝46 局比賽。

將勝者登記為○、敗者登記為╳、在場下休息者登記為△，

此三人戰績表登記如下（下表只是舉例）：

| | 第 1 局 | 第 2 局 | 第 3 局 | 第 4 局 | … | 第 45 局 | 第 46 局 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 阿祥 | △ | ╳ | △ | ╳ | … | △ | ╳ |
| 阿仁 | ╳ | △ | ○ | ○ | … | ╳ | △ |
| 阿慶 | ○ | ○ | ╳ | △ | … | ○ | ○ |

由「輸的人就下場」可知：

(1) 除了第 1 局的△，每一列的△前面必定是╳。

(2) 除了第 46 局的╳，每一列的╳後面必定是△。

於是除了第 1 局為△與第 46 局為╳的人，

其△的數目與╳的數目必相等，故其○的數目必為 46－偶數＝偶數。

而此三人中，只有阿祥的勝場數為偶數，

所以他的戰績必為 8 局○、19 局╳、19 局△，故他總共上場了 27 局。

註：其餘兩人的戰績，可能是

「阿慶 21○12╳13△（第 1 局△）、阿仁 17○15╳14△（第 46 局╳）」，

或是「阿慶 21○13╳12△（第 46 局╳）、阿仁 17○14╳15△（第 1 局△）」。

1-6 如右圖，平面上有$\triangle ABC$，

取$\overline{BC}$中點$M$，連接$\overline{AM}$。

再取$\overline{AM}$的三等分點$D$、$E$，

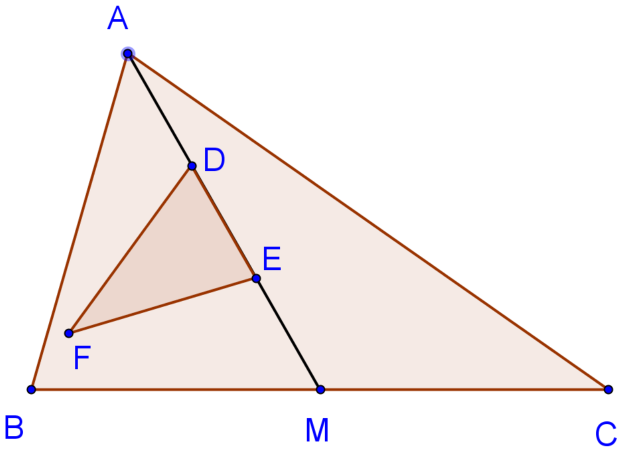
使得$\overline{AD}=\overline{DE}=\overline{EM}$。

在平面上取一點$F$，

使得$\triangle DEF \sim \triangle ABC$，

且點$F$與$B$在直線$AM$的同一側。

請證明：點$F$一定在直線$AB$上。

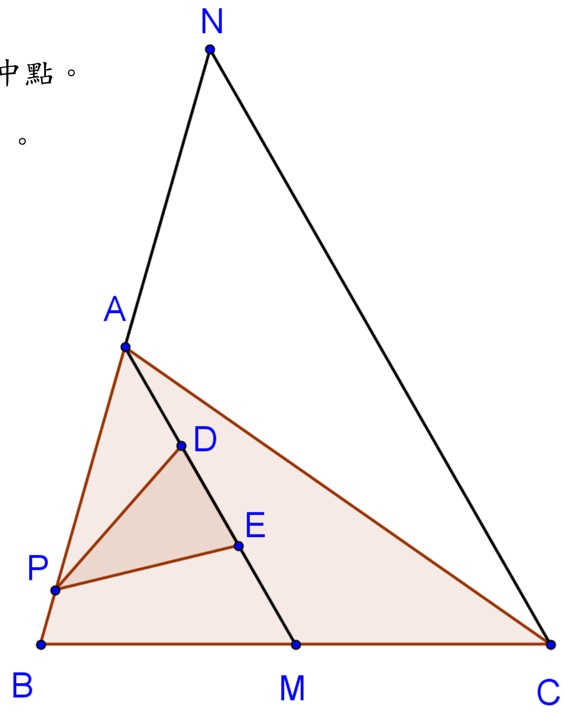



解：

如右圖，在平面上取一點$N$，使得$A$為$\overline{BN}$中點。

在射線$AB$上取一點$P$，使得$\angle AEP=\angle ABC$。

連接$\overline{DP}$。




如果我們可以證明$\triangle DEP \sim \triangle ABC$，

則$P$點就是題目所述的$F$點，

也就證明了$F$在直線$AB$上。

以下證明$\triangle DEP \sim \triangle ABC$：

因為$A$、$M$分別為$\overline{BN}$、$\overline{BC}$的中點，

所以$\overline{AM} \parallel \overline{NC} \Rightarrow \angle BAM=\angle BNC$。

又因為$\angle AEP=\angle ABC$，所以$\triangle AEP \sim \triangle NBC$（AA 相似）。

於是$\overline{AE}:\overline{EP}=\overline{NB}:\overline{BC} \Rightarrow \frac{1}{2}\overline{AE}:\overline{EP}=\frac{1}{2}\overline{NB}:\overline{BC} \Rightarrow \overline{DE}:\overline{EP}=\overline{AB}:\overline{BC}$。

此條件再加上$\angle AEP=\angle ABC$，即可得$\triangle DEP \sim \triangle ABC$（SAS 相似），證畢。