

北一女中 102 學年度下學期《數戰數決》有獎徵答活動

第六期題目：

2014 年 06 月 06 日下午 1 點鐘截止

6-1 資訊課時，在電腦老師的循循善誘下，阿邱想設計電玩遊戲，規定玩家必須從原點 A 出發，沿著坐標平面上的格子線走，路線可重複經過，且每走一單位算一步。若某玩家走 8 步後踏在原點 A 上，則此玩家的 8 步有幾種走法？

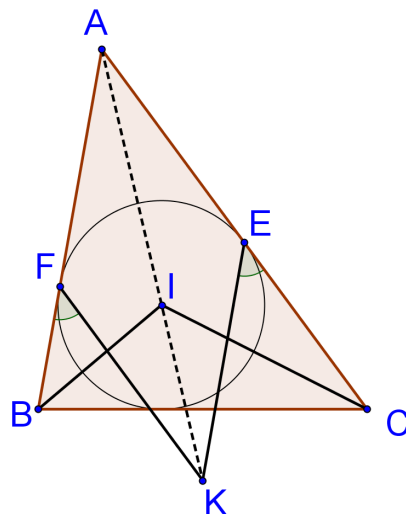
6-2 定義數列 $\langle a_n \rangle$: $\frac{107811}{3}, \frac{110778111}{3}, \frac{111077781111}{3}, \frac{111107777811111}{3}, \dots$
(亦即 $a_n = \frac{\overbrace{11\dots1}^{n\text{個}1} \overbrace{107\dots7}^{n\text{個}7} \overbrace{811\dots1}^{n+1\text{個}1}}{3}$)，請證明 $\langle a_n \rangle$ 的每一項都是完全立方數。

6-3 已知 a, b, c, d 都是整數，其中 $a \neq 0$ 。若 ad 是奇數而且 bc 是偶數，則方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 的三個根不可能都是有理根。

6-4. 如圖，已知 I 是 $\triangle ABC$ 的內心，且 $\triangle ABC$ 的內切圓分別與 \overline{CA} 切於點 E 、與 \overline{AB} 切於點 F 。

若 $\triangle BIC$ 的外心為 K ，請證明：

- (1) A, I, K 三點共線。
- (2) $\angle KFB = \angle KEC$ 。



6-5. 魔術師有 99 張卡片，每一張卡片上都寫了 1~99 (包含 1 與 99) 的某個正整數號碼。已知小綠從魔術師手中抽任意多張卡片 (可以全抽、但不能不抽)，這些卡片上的號碼和都不能被 100 整除。請證明：這些卡片上的號碼都是一樣的。

6-6. 在一個正 4027 邊形的頂點中，任意選取其中 2014 個頂點，請證明：在這 2014 個頂點中，一定有 3 個頂點是一個等腰三角形的頂點。