北一女中 101 學年度下學期《數戰數決》有獎徵答活動

第六期解答：

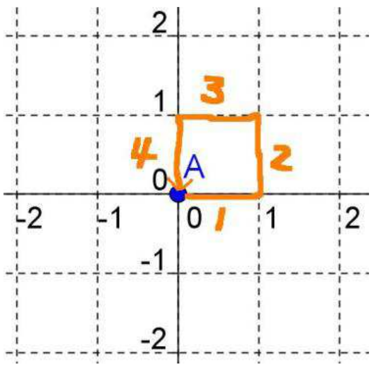
6-1 資訊課時，在電腦老師的循循善誘下，阿邱想設計電玩遊戲，規定玩家必須從原點 A 出發，沿著坐標平面上的格子線走，路線可重複經過，且每走一單位算一步。若某玩家走 8 步後踏在原點 A 上，則此玩家的 8 步有幾種走法？

答：4900

解：

設此玩家共走了 x 步向上，y 步向下，z 步向左，u 步向右

就 (x,y,z,u) 分以下狀況討論



(i) $(x,y,z,u)=(4,4,0,0)$ 的方法有 $\dfrac{8!}{4!4!0!0!}=70$ 種。

(ii) $(x,y,z,u)=(3,3,1,1)$ 的方法有 $\dfrac{8!}{3!3!1!1!}=1120$ 種。

(iii) $(x,y,z,u)=(2,2,2,2)$ 的方法有 $\dfrac{8!}{2!2!2!2!}=2520$ 種。

(iv) $(x,y,z,u)=(1,1,3,3)$ 的方法有 $\dfrac{8!}{1!1!3!3!}=1120$ 種。

(v) $(x,y,z,u)=(0,0,4,4)$ 的方法有 $\dfrac{8!}{0!0!4!4!}=70$ 種。

共 $70+1120+2520+1120+70=4900$ 種

6-2 定義數列$\langle a_n \rangle$：$\frac{107811}{3},\frac{110778111}{3},\frac{111077781111}{3},\frac{111107777811111}{3},\ldots\ldots$

（亦即 $a_n=\dfrac{\overbrace{11\cdots1}^{n\text{個}1}0\overbrace{7\cdots7}^{n\text{個}7}8\overbrace{11\cdots1}^{n+1\text{個}1}}{3}$），請證明$\langle a_n \rangle$的每一項都是完全立方數。

解：

觀察前幾項：$\dfrac{107811}{3}=33^3$、$\dfrac{110778111}{3}=333^3$，於是可猜測 $a_n=(\overbrace{33\cdots3}^{n+1\text{個}3})^3$。

因為 $\overbrace{33\cdots3}^{n+1\text{個}3}=\dfrac{\overbrace{99\cdots9}^{n+1\text{個}9}}{3}=\dfrac{10^{n+1}-1}{3}$，

所以 $(\overbrace{33\cdots3}^{n+1\text{個}3})^3=(\dfrac{10^{n+1}-1}{3})^3=\dfrac{10^{3n+3}-3\times10^{2n+2}+3\times10^{n+1}-1}{27}$

$$=\frac{(10^{3n+3}-1)-3\times10^{n+1}\times(10^{n+1}-1)}{27}$$

$$=\frac{\overbrace{99\cdots9}^{3n+3\text{個}9}-3\times10^{n+1}\times\overbrace{99\cdots9}^{n+1\text{個}9}}{27}$$

$$=\frac{\overbrace{11\cdots1}^{3n+3\text{個}1}-\overbrace{33\cdots3}^{n+1\text{個}3}\overbrace{00\cdots0}^{n+1\text{個}0}}{3}$$

$$=\frac{\overbrace{11\cdots1}^{n\text{個}1}\overbrace{11\cdots1}^{n+2\text{個}1}\overbrace{11\cdots1}^{n+1\text{個}1}-\overbrace{33\cdots3}^{n+1\text{個}3}\overbrace{00\cdots0}^{n+1\text{個}0}}{3}=\frac{\overbrace{11\cdots1}^{n\text{個}1}0\overbrace{7\cdots7}^{n\text{個}7}8\overbrace{11\cdots1}^{n+1\text{個}1}}{3}=a_n，$$

所以 $a_n=(\overbrace{33\cdots3}^{n+1\text{個}3})^3$，故$\langle a_n \rangle$的每一項都確實是完全立方數。

6-3 已知a,b,c,d都是整數，其中$a\neq 0$。若ad是奇數而且bc是偶數，請證明：

方程式$ax^3+bx^2+cx+d=0$的三個根不可能都是有理根。

解：

因為ad是奇數，所以a與d都是奇數。

假設$ax^3+bx^2+cx+d=0$的三個根為$\dfrac{q_1}{p_1},\dfrac{q_2}{p_2},\dfrac{q_3}{p_3}$都是有理根，

其中$\dfrac{q_k}{p_k}$都是最簡分數。

根據牛頓定理可知$p_k\mid a$且$q_k\mid d$，故p_1,p_2,p_3,q_1,q_2,q_3都是奇數。

由根與係數關係可知

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{a}=\dfrac{q_1}{p_1}+\dfrac{q_2}{p_2}+\dfrac{q_3}{p_3}=\dfrac{q_1p_2p_3+p_1q_2p_3+p_1p_2q_3}{p_1p_2p_3} \\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{q_1}{p_1}\cdot\dfrac{q_2}{p_2}+\dfrac{q_2}{p_2}\cdot\dfrac{q_3}{p_3}+\dfrac{q_3}{p_3}\cdot\dfrac{q_1}{p_1}=\dfrac{q_1q_2p_3+p_1q_2q_3+q_1p_2q_3}{p_1p_2p_3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} b\cdot p_1p_2p_3=-a(q_1p_2p_3+p_1q_2p_3+p_1p_2q_3)\ \text{為奇數} \\ c\cdot p_1p_2p_3=a(q_1q_2p_3+p_1q_2q_3+q_1p_2q_3)\quad\ \text{為奇數} \end{cases}$$ ，所以b,c均為奇數，

此與bc是偶數矛盾。

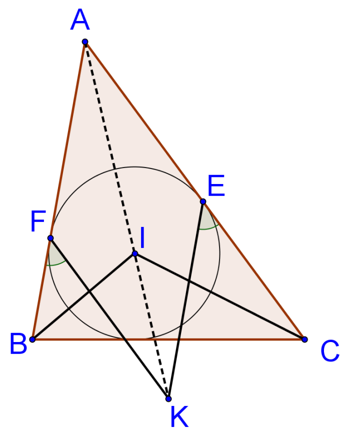
故方程式$ax^3+bx^2+cx+d=0$的三個根不可能都是有理根。

6-4. 如圖，已知 I 是$\triangle ABC$ 的內心，且$\triangle ABC$ 的內切圓分別與 $\overline{CA}$ 切於點 E、與 $\overline{AB}$ 切於點 F。

若$\triangle BIC$ 的外心為 K，請證明：

(1) A、I、K 三點共線。

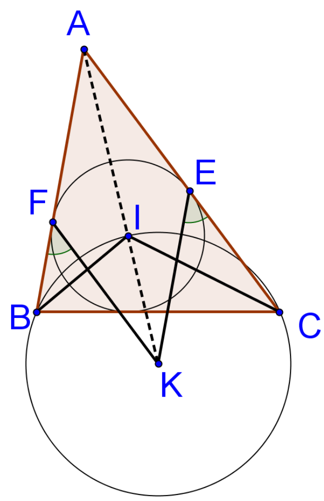
(2) $\angle KFB = \angle KEC$ 。



解：

(1)

作$\triangle BIC$ 的外接圓。



因為 $\overline{KB} = \overline{KI}$ ，

所以 $\angle KIB = \dfrac{180° - \angle BKI}{2} = 90° - \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{BI}$

$= 90° - \angle BCI = 90° - \dfrac{1}{2}\angle BCA$ 。

而 $\angle AIB = 180° - \angle IAB - \angle IBA = 180° - \dfrac{1}{2}\angle BAC - \dfrac{1}{2}\angle ABC$

$= 90° + \dfrac{180° - \angle BAC - \angle ABC}{2} = 90° + \dfrac{1}{2}\angle BCA$ 。

於是 $\angle KIB + \angle AIB = (90° - \dfrac{1}{2}\angle BCA) + (90° + \dfrac{1}{2}\angle BCA) = 180°$ ，

故 A、I、K 三點共線。

(2)

因為 $\overline{AE}$ 、 $\overline{AF}$ 都是$\triangle ABC$ 內切圓的切線段，所以 $\overline{AE} = \overline{AF}$ 。

又因為 $\overline{AK} = \overline{AK}$ 、 $\angle KAB = \angle KAC$ ，所以$\triangle KAF \cong \triangle KAE$，

故 $\angle AFK = \angle AEK \Rightarrow \angle KFB = 180° - \angle AFK = 180° - \angle AEK = \angle KEC$ ，證畢。

6-5. 魔術師有 99 張卡片，每一張卡片上都寫了 1～99（包含 1 與 99）的某個正整數號碼。已知小綠從魔術師手中抽任意多張卡片（可以全抽、但不能不抽），這些卡片上的號碼和都不能被 100 整除。請證明：這些卡片上的號碼都是一樣的。

解：

令這 99 張卡片上的號碼分別是 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_{99}$。

反證法：假如有兩張卡片的號碼不相同，不妨設 $a_1 \neq a_2$，

令 $S_k = \sum_{i=1}^{k} a_i = a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_k$，

則考慮下列 100 個數：$a_1, a_2, S_2, S_3, S_4, \cdots\cdots, S_{99}$，

根據題目敘述，這 100 個數都不是 100 的倍數，

所以這 100 個數除以 100 的餘數只可能是 $1, 2, 3, \cdots\cdots, 99$ 這 99 種可能，

由鴿籠原理可知必定有 2 個數除以 100 的餘數相同。

首先，這 2 個數不可能是 a_1, a_2，因為 $1 \le a_1, a_2 \le 99$ 且 $a_1 \neq a_2$。

而如果這 2 個數是 a_1 與 S_k，則 $100 \mid (S_k - a_1) \Rightarrow 100 \mid (a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_k)$，矛盾。

同理，這 2 個數也不可能是 a_2 與 S_k。

而如果這 2 個數是 S_m 與 S_k，其中 $m < k$，

則 $100 \mid (S_k - S_m) \Rightarrow 100 \mid (a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots\cdots + a_k)$，矛盾。

所以不存在兩張卡片的號碼是不相同的，故這些卡片上的號碼都是一樣的。

6-6. 在一個正 4027 邊形的頂點中，任意選取其中 2014 個頂點，請證明：在這 2014 個頂點中，一定有 3 個頂點是一個等腰三角形的頂點。

解：

令此正 4027 邊形的頂點依序為 $P_1, P_2, \cdots\cdots, P_{4027}$ 。

假設在這 2014 個被選取的頂點中，不存在 3 個頂點是一個等腰三角形的頂點。

不妨假設其中一個被選取到的頂點是 P_1 。

則考慮 $\{P_2, P_{4027}\}, \{P_3, P_{4026}\}, \{P_4, P_{4025}\}, \cdots\cdots, \{P_{2014}, P_{2015}\}$ 這 2013 個二元點集合，

每一個集合的兩個元素和 P_1 恰好是一個等腰三角形的頂點，

所以除了 P_1 ，剩下 2013 個選取的點，一定是從這些二元點集合中各選一個點。

於是 $\{P_2, P_{4027}\}$ 中恰有一個點是被選取的，不妨設是 P_2 被選取。

因為 P_1, P_2, P_3 是一個等腰三角形的頂點，

所以 P_3 不是被選取的點，故 P_{4026} 是被選取的點。

因為 P_1, P_{4026}, P_{4024} 是一個等腰三角形的頂點，

所以 P_{4024} 不是被選取的點，故 P_5 是被選取的點，

但此時 P_5, P_2, P_{4026} 也是一個等腰三角形的頂點，

而 P_5, P_2, P_{4026} 也都是被選取的點，矛盾。

故在這 2014 個被選取的頂點中，一定有 3 個頂點是一個等腰三角形的頂點。