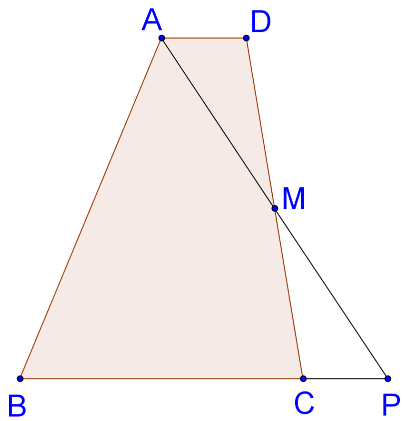
北一女中 101 學年度下學期《數戰數決》有獎徵答活動

第五期解答：

5-1　梯形 $ABCD$ 中，已知 $\overline{AD}\,/\!/\,\overline{BC}$ 且 $\overline{AB}=\overline{AD}+\overline{BC}$。請證明：$\angle A$ 的內角平分線必定通過 $\overline{CD}$ 的中點。



解：

如右圖，在直線 BC 上取一點 P，

使得 $\overline{CP}=\overline{AD}$，且 C 在 B、P 之間。

連接 $\overline{AP}$，假設 $\overline{AP}$ 與 $\overline{CD}$ 交於一點 M。

因為 $\overline{BP}=\overline{BC}+\overline{CP}=\overline{BC}+\overline{AD}=\overline{AB}$

所以 $\angle BAP=\angle APB$。

又因為 $\overline{AD}\,/\!/\,\overline{BC}$，所以 $\angle PAD=\angle APB$ 且 $\angle ADM=\angle PCM$。

故 $\angle BAP=\angle APB=\angle PAD$，於是直線 AP 就是 $\angle A$ 的內角平分線。

因為 $\angle PAD=\angle APB$、$\angle ADM=\angle PCM$、$\overline{AD}=\overline{CP}$，

所以 $\triangle ADM\cong\triangle PCM$（$ASA$ 全等性質）$\Rightarrow \overline{DM}=\overline{CM}\Rightarrow M$ 是 $\overline{CD}$ 的中點。

於是 $\angle A$ 的內角平分線通過 $\overline{CD}$ 的中點，證畢。

5-2 如果$S=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{5\times 6}+\cdots\cdots+\frac{1}{2013\times 2014}$、

$T=\frac{1}{1008\times 2014}+\frac{1}{1009\times 2013}+\frac{1}{1010\times 2012}+\cdots\cdots+\frac{1}{2014\times 1008}$，

試求$\frac{S}{T}$之值。

答：1511

解：

$$S=\sum_{k=1}^{1007}\frac{1}{(2k-1)\times 2k}=\sum_{k=1}^{1007}\left(\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k}-\frac{2}{2k}\right)=\sum_{k=1}^{1007}\left(\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k}\right)-\sum_{k=1}^{1007}\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{2014}\left(\frac{1}{k}\right)-\sum_{k=1}^{1007}\left(\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=1008}^{2014}\left(\frac{1}{k}\right)\text{。}$$

$$T=\sum_{k=1}^{1007}\frac{1}{(k+1007)(2015-k)}=\sum_{k=1}^{1007}\frac{1}{3022}\left(\frac{1}{k+1007}+\frac{1}{2015-k}\right)$$

$$=\frac{1}{3022}\sum_{k=1}^{1007}\left(\frac{1}{k+1007}+\frac{1}{2015-k}\right)$$

$$=\frac{1}{3022}\times 2\times\left[\frac{1}{1008}+\frac{1}{1009}+\cdots\cdots+\frac{1}{2014}\right]=\frac{1}{1511}\sum_{k=1008}^{2014}\left(\frac{1}{k}\right)\text{。}$$

所以$\frac{S}{T}=1511$。

5-3 對於任意給定的 54 個相異正整數，證明其中必存在a,b,c,d四個相異正整數，滿足$(a-b)(c-d)$為 2014 的倍數。

解：

$2014=2\times 19\times 53=38\times 53$。

任何正整數除以 53，餘數為$0,1,2,\cdots\cdots,52$，共有 53 種可能。

由鴿籠原理知，任意 54 個相異正整數中，必有兩數a,b除以 53 有相同餘數，

即$(a-b)$為 53 的倍數。

同理可知，扣除a,b兩數之剩餘 52 數中，必有兩數c,d除以 38 有相同餘數，

即$(c-d)$為 38 的倍數。

所以$(a-b)(c-d)$為 2014 的倍數。

5-4 如果把非零循環小數$0.\overline{abc}$（其中a,b,c分別代表十分位數字、百分位數字以及千分位數字，亦即都是 0 至 9 的數字）化為最簡分數，則分子有幾種不同的可能值？

答：660

解：

假設$x=0.\overline{001}$，則$1000x=1.\overline{001}\Rightarrow 999x=1\Rightarrow x=\dfrac{1}{999}$。

於是題目所述的非零循環小數化為分數後即為$\dfrac{1}{999},\dfrac{2}{999},\cdots\cdots,\dfrac{999}{999}$。

令$S=\left\{\dfrac{1}{999},\dfrac{2}{999},\cdots\cdots,\dfrac{999}{999}\right\}$，

且A為S的所有元素化為最簡分數後，所有分子所形成的集合，

顯然$A\subset\{1,2,3,\cdots\cdots,999\}$。

因為$999=3^3\times37$，所以S中可以約分的元素，其分子必定是 3 或 37 的倍數。

如果S中的元素$\dfrac{k}{999}$約分後，分子仍是 37 的倍數，

則k必定是$37^2=1369$的倍數，但S中沒有這樣的元素，

所以，所有 37 的倍數都不是集合A的元素。

如果S中的元素$\dfrac{k}{999}$約分後，分子仍是 3 的倍數，

則k必定是$3^4=81$的倍數，

在S中這樣的元素有$\dfrac{81}{999},\dfrac{162}{999},\dfrac{243}{999},\cdots\cdots,\dfrac{972}{999}$共 12 個，

約分後的分子分別為$3,6,9,\cdots\cdots,36$。

所以，集合A的元素中，是 3 的倍數的只有$3,6,9,\cdots\cdots,36$這 12 個數。

於是 $$\begin{aligned} n(A) &= 999-n(3\text{的倍數})-n(37\text{的倍數})+(111\text{的倍數})+12 \\ &= 999-333-27+9+12=660 \end{aligned}$$ 。

5-5 已知 n 是大於 1 的正整數。若 $997n$ 的各位數字都是奇數，則 n 的最小值為何？

答：335

解：

因為 $997n$ 的個位數字是奇數，所以 n 一定也是奇數。

若 $n \le 333$，則 $997n = (1000-3)n = 1000n - 3n = 1000(n-1) + (1000-3n)$，

其中 $1 \le 1000-3n < 1000$，所以 $997n$ 的末三位數就是 $(1000-3n)$，

而 $997n$ 的千位數字就是 $(n-1)$ 的個位數字，

又因為 n 是奇數，所以 $(n-1)$ 的個位數字是偶數，矛盾。故 $n \ge 335$。

當 $n = 335$ 時，$997n = (1000-3)\times 335 = 335000 - 1005 = 333995$ 符合題目要求，

所以 n 的最小值為 335。

5-6. 一圓周上有 101 個相異點。若小綠從其中一點為起點開始畫弦，一筆畫連接了 101 條弦（每一條弦都是以這 101 個點為端點）後回到原起點。一筆畫的過程中，每個點都只通過一次。則小綠畫出來的弦在圓內最多可以有幾個交點？

答：4949

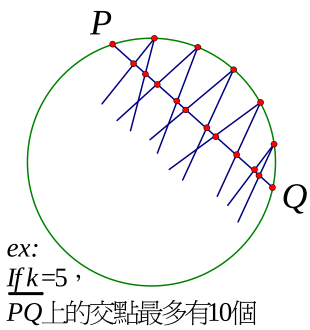
解：

圓上有 101 個點 $\Rightarrow$ 一筆畫可畫出 101 條弦。

每一點可連兩弦，圓上在弦 $\overline{PQ}$ 兩側的點分別有 k 和 $99-k$ 個，

不失一般性，若 $k < 99-k$，則弦 $\overline{PQ}$ 的交點有 $2k$ 個（如下圖）。

$k < 99-k \Rightarrow k$ 最大為 49，故每條弦上最多可以有 98 個交點。



又每個交點是由兩弦相交，所以由握手定理（Handshaking Lemma）知：

圓內弦的交點數最多為 $101\times 98 \div 2 = 4949$，及所求必不大於 4949。

故只要畫出的每一弦兩側在圓上的點分別有 49、50 即可。

若圓上的 101 個分點依序為 $A_1, A_2, \cdots\cdots, A_{101}$，

則依序連接 $A_1A_{52}A_2A_{53}A_3A_{54}A_4\cdots\cdots A_{50}A_{101}A_{51}A_1$ 即為所求。